11. Die Umlaufzahl und der Residuensatz

Wir wollen uns nun noch einmal mit der Berechnung geschlossener Wegintegrale beschäftigen. Sind $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein geschlossener Weg in D, so haben wir für die Berechnung von $\int_\gamma f(z)\,dz$ bisher die folgenden Hilfsmittel kennengelernt:

- Besitzt f eine Stammfunktion auf D, so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (siehe Lemma 3.10).
- Ist γ in D zusammenziehbar (z. B. weil D einfach zusammenhängend ist), so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (siehe Folgerung 5.3 (b)).
- Ist z_0 eine isolierte Singularität von f, ist γ eine hinreichend kleine geschlossene Kreislinie um z_0 und f von der Form $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und einer auf $D \cup \{z_0\}$ holomorphen Funktion g, so gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!} \cdot g^{(n)}(z_0)$$
nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel aus Satz 7.10 (b).

Wir wollen in diesem Kapitel nun einen Satz herleiten, der diese bisherigen Hilfsmittel wesentlich verallgemeinert und in „nahezu allen“ Fällen eine einfache Berechnung des Integrals $\int_\gamma f(z)\,dz$ ermöglicht (also ohne Stammfunktionen zu kennen oder die Wegintegrale nach Definition auszurechnen). Dieser sogenannte *Residuensatz* ist wahrscheinlich der wichtigste Satz dieser Vorlesung. Er hat seinerseits natürlich wieder viele Anwendungen, von denen wir einige im Anschluss an dieses Kapitel noch sehen werden.

Bemerkung 11.1. Als ersten Schritt auf dem Weg zum Residuensatz wollen wir zuerst zwar beliebige geschlossene Integrationswege γ zulassen, für den Integranden jedoch noch annehmen, dass er die spezielle Form $(z-z_0)^n$ hat für ein $n \in \mathbb{Z}$ und ein z_0, das nicht auf dem Integrationsweg liegt. Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, ist dies der entscheidende Schritt, denn eine beliebige holomorphe Funktion können wir ja dann später durch Reihenentwicklung einfach als Summe solcher speziellen Integranden schreiben.

Der Fall $n \neq -1$ ist natürlich sehr einfach zu behandeln: Da in diesem Fall $(z-z_0)^n$ die Stammfunktion $\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ besitzt, ist jedes geschlossene Wegintegral über diese Funktion 0 nach Lemma 3.10. Interessant ist also nur der Fall $n = -1$, d. h. wir wollen das Integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ für einen beliebigen Weg in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ berechnen. Um die Notation etwas zu vereinfachen, machen wir zunächst die Substitution
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z},$$
wobei $\gamma' : t \mapsto \gamma(t) - z_0$ der um $-z_0$ verschobene Weg γ ist. Von diesem Integral wissen wir aber bereits nach Aufgabe 3.13, dass das Ergebnis immer $2\pi\mathrm{i}k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Wir haben in dieser Aufgabe sowie in Beispiel 5.4 auch bereits gesehen, dass diese Zahl k interpretiert werden kann als die Anzahl, „wie oft der Weg γ' um 0 (bzw. γ um z_0) herum läuft“.

Diese Beobachtungen müssen wir jetzt in exakte mathematische Aussagen umwandeln. Wie oft in der Mathematik zäumen wir dafür das Pferd von hinten auf und *definieren* zunächst einmal die Zahl k oben als die Umlaufzahl von γ um z_0:

Definition 11.2 (Umlaufzahl)**.** Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Die (nach Bemerkung 11.1 ganze) Zahl
$$\operatorname{ind}_{z_0} \gamma := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$
heißt **Index** oder **Umlaufzahl** von γ um z_0.

Der folgende Satz sieht zwar etwas kompliziert aus, ist aber sehr einfach anzuwenden und sagt uns letztlich, dass unsere Definition der Umlaufzahl auch wirklich das tut, was wir erwarten. Wie in Bemerkung 11.1 erläutert können wir nach einer Substitution o. B. d. A. $z_0 = 0$ annehmen.

Satz 11.3 (Geometrische Deutung der Umlaufzahl)**.** *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *ein geschlossener Weg, der die negative reelle Achse n-mal von oben nach unten und m-mal von unten nach oben durchkreuzt. Mit anderen Worten setzen wir voraus, dass es verschiedene Punkte* $t_1^+,\dots,t_n^+,t_1^-,\dots,t_m^- \in (a,b)$ *gibt, so dass gilt:*

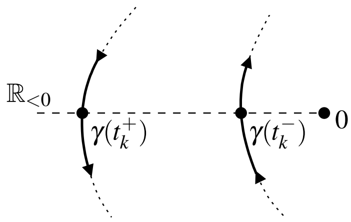
(a) *es ist* $\arg\gamma(t) = \pi$ *genau dann, wenn* $t = t_k^+$ *oder* $t = t_k^-$ *für ein k, d. h. der Weg trifft die negative reelle Achse* $\mathbb{R}_{<0}$ *genau für die Parameterwerte* t_k^+ *und* t_k^-*;*

(b) *bei* $t_1^+,\dots,t_n^+$ *springt* $\arg\gamma(t)$ *von* π *nach* $-\pi$*, d. h. für alle* $k = 1,\dots,n$ *ist*

$$\lim_{t\uparrow t_k^+} \arg\gamma(t) = \pi \quad \textit{und} \quad \lim_{t\downarrow t_k^+} \arg\gamma(t) = -\pi;$$

(c) *bei* $t_1^-,\dots,t_m^-$ *springt* $\arg\gamma(t)$ *von* $-\pi$ *nach* π*, d. h. für alle* $k = 1,\dots,m$ *ist*

$$\lim_{t\uparrow t_k^-} \arg\gamma(t) = -\pi \quad \textit{und} \quad \lim_{t\downarrow t_k^-} \arg\gamma(t) = \pi.$$



Hierbei bezeichnet $\arg\gamma(t) \in (-\pi,\pi]$ *den Winkel der komplexen Zahl* $\gamma(t)$ *wie in Bemerkung 1.10.*

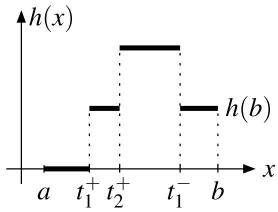
Dann gilt $\operatorname{ind}_0\gamma = n - m$*.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$h\colon [a,b]\backslash\{t_1^+,\dots,t_n^+,t_1^-,\dots,t_m^-\} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt + \log\gamma(a) - \log\gamma(x),$$

wobei log der auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\le 0}$ definierte komplexe Logarithmus aus Aufgabe 3.13 ist. Es gilt offensichtlich:

- $h(a) = 0$ und $h(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{ind}_0\gamma$;
- für alle x im Definitionsbereich von h ist
$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} - \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = 0.$$
Die Funktion h ist also lokal konstant und springt damit wie im Bild rechts dargestellt höchstens an den Stellen $t_1^+,\dots,t_n^+,t_1^-,\dots,t_m^-$.

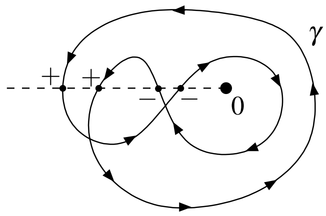


Damit ist $h(b) - h(a) = 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{ind}_0\gamma$ gleich der Summe der Sprünge, die die Funktion macht. Da in der Definition von h lediglich der letzte Term $-\log\gamma(x)$ Sprungstellen hat, ist der Sprung von h an einer Stelle t_k^+ aber gerade

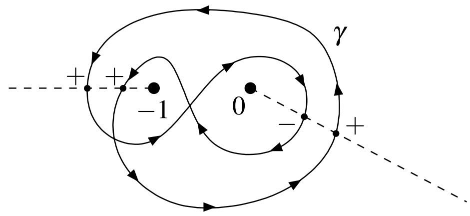
$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\big(h(t_k^+ + \varepsilon) - h(t_k^+ - \varepsilon)\big)\\
&\quad= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\big(-\log\gamma(t_k^+ + \varepsilon) + \log\gamma(t_k^+ - \varepsilon)\big)\\
&\quad= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\big(-\log|\gamma(t_k^+ + \varepsilon)| - i\arg\gamma(t_k^+ + \varepsilon) + \log|\gamma(t_k^+ - \varepsilon)| + i\arg\gamma(t_k^+ - \varepsilon)\big)\\
&\quad= -\log|\gamma(t_k^+)| + \pi\mathrm{i} + \log|\gamma(t_k^+)| + \pi\mathrm{i}\\
&\quad= 2\pi\mathrm{i},
\end{aligned}$$

und analog an einer Stelle t_k^- gleich $-2\pi\mathrm{i}$. Summieren wir alle Sprünge auf, erhalten wir also $2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{ind}_0\gamma = 2\pi\mathrm{i}(n-m)$, was zu zeigen war. □

Beispiel 11.4. Der im Bild unten links dargestellte Weg hat Umlaufzahl $\operatorname{ind}_0 \gamma = 0$ um 0, denn es gibt je zwei Überkreuzungen der negativen reellen Achse von oben nach unten bzw. von unten nach oben (mit „+“ bzw. „−“ gekennzeichnet).



zu Beispiel 11.4



zu Bemerkung 11.5

Bemerkung 11.5.

(a) Für Umlaufzahlen um andere Punkte als den Nullpunkt ergibt sich natürlich dasselbe Verfahren, nur dass wir dann einen Strahl vom betrachteten Punkt aus nach links ziehen und die Überkreuzungen mit diesem Strahl zählen müssen — so ist z. B. die Umlaufzahl des im Bild oben rechts eingezeichneten Weges um den Punkt -1 gleich $\operatorname{ind}_{-1} \gamma = 2$.

(b) Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals aus Folgerung 5.3 (a) ist klar, dass zwei geschlossene Wege in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ die gleiche Umlaufzahl um z_0 haben, wenn sie homotop in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ sind, also durch eine Deformation in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ auseinander hervorgehen (in der Tat kann man zeigen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt: Wenn die beiden Wege die gleiche Umlaufzahl um z_0 haben, so sind sie homotop in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$). Es ist natürlich auch anschaulich einleuchtend, dass solche homotopen Wege „gleich oft“ um z_0 herum laufen müssen.

(c) Eine spezielle Homotopie in (b) besteht darin, dass man den gesamten Weg um den Punkt z_0 um einen bestimmten Winkel dreht. Berechnet man von diesem gedrehten Weg die Umlaufzahl um z_0 nach Satz 11.3, so erhält man offensichtlich dasselbe Resultat, als wenn man die Schnittpunkte des ursprünglichen Weges mit der um den entgegengesetzten Winkel gedrehten negativen reellen Achse betrachtet. Wir sehen also, dass wir in Satz 11.3 statt des dort betrachteten, nach links laufenden Strahls von z_0 auch einen beliebigen anderen verwenden können — die positiven bzw. negativen Überkreuzungen verlaufen dann natürlich lediglich nicht mehr „von oben nach unten“ bzw. „von unten nach oben“, sondern sind solche im mathematisch positiven bzw. negativen Drehsinn um z_0. Im Bild oben rechts ist z. B. eingezeichnet, wie man für den dort betrachteten Weg die Umlaufzahl $\operatorname{ind}_0 \gamma = 0$ auch mit Hilfe eines anderen Strahls bestimmen könnte.

(d) Insbesondere folgt aus (b) und (c), dass wir Satz 11.3 in jedem Fall zur Berechnung der Umlaufzahl eines Weges um einen Punkt verwenden können, auch wenn die Voraussetzung der endlich vielen Schnittpunkte a priori nicht erfüllt ist: Gibt es z. B. unendlich viele Schnittpunkte mit dem dort betrachteten Strahl nach links, weil der Weg ein Stück weit auf dem Strahl entlang läuft, so können wir einfach einen anderen Strahl betrachten oder den Weg so deformieren, dass es nur noch endlich viele Schnittpunkte gibt.

10

Nachdem wir nun Wegintegrale der Form $\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz$ (und insbesondere $\int_\gamma (z-z_0)^{-1} \, dz$) ausführlich studiert haben, kommen wir jetzt zum Fall von allgemeinen Integranden. Wie wir am Anfang dieses Kapitels schon erwähnt haben, wollen wir diesen allgemeinen Fall auf die Integrale $\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz$ zurückführen, indem wir den Integranden auf geeignete Art in eine Laurent-Reihe entwickeln. Da von diesen Integralen nur der Fall $n = -1$ einen Beitrag liefert, wird der Koeffizient vor $(z-z_0)^{-1}$ in dieser Laurent-Entwicklung eine besondere Rolle spielen. Wir geben ihm daher einen speziellen Namen.

Definition 11.6 (Residuum)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in D$ oder eine isolierte Singularität von f. Wie in Definition 10.3 können wir f dann lokal um z_0 in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

entwickeln. Mit diesen Notationen heißt der Koeffizient

$$\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$$

von $(z-z_0)^{-1}$ in dieser Reihe das **Residuum** von f in z_0.

Beispiel 11.7.

(a) Ist f holomorph (fortsetzbar) in z_0, so ist f natürlich eine Potenzreihe um z_0 und damit $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} &= \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots\right) \\
&= \operatorname{res}_0 \left(1 \cdot z^{-3} - \frac{1}{6} \cdot z^{-1} + \frac{1}{120} \cdot z \mp \cdots\right) \\
&= -\frac{1}{6},
\end{aligned}$$

wie man sofort durch Reihenentwicklung und Ablesen des Koeffizienten von z^{-1} ermittelt.

Die Berechnung der Laurent-Entwicklung einer gegebenen Funktion ist in der Praxis oft recht aufwändig. Wollen wir nur das Residuum bestimmen, so führt das folgende Lemma im Fall von Polstellen oft schneller zum Ziel:

Lemma 11.8 (Berechnung des Residuums)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ eine isolierte Singularität von f. Hat dann f in z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ (d. h. ist $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$), so gilt für das Residuum von f in z_0 die Formel*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \Big((z-z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)}$$

(wobei das $(m-1)$ rechts oben für die $(m-1)$-te Ableitung der Funktion in den großen Klammern steht).

Beweis. Ist $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$, so hat die Laurent-Entwicklung von f in z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(z-z_0)^m f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \\
&= a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0 (z-z_0)^m + \cdots.
\end{aligned}$$

Beim $(m-1)$-fachen Differenzieren dieser Potenzreihe fallen natürlich die Terme mit einer Potenz von $z-z_0$ kleiner als $m-1$ weg, und wir erhalten

$$\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 1 + a_0 \cdot m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (z-z_0) + \cdots.$$

Bilden wir hier nun den Grenzwert für $z \to z_0$, so erhalten wir offensichtlich genau $a_{-1} \cdot (m-1)!$, was mit der Definition des Residuums die Behauptung des Lemmas zeigt. $\square$

Beispiel 11.9.

(a) Wir wollen mit Hilfe von Lemma 11.8 noch einmal das Residuum $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4}$ aus Beispiel 11.7 (b) bestimmen. Die betrachtete Funktion hat im Nullpunkt eine dreifache Polstelle (da der Zähler eine einfache und der Nenner eine vierfache Nullstelle hat). Wir könnten Lemma 11.8 also mit $m = 3$ verwenden. Einfacher ist es jedoch, $m = 4$ zu wählen (was im Lemma ja zugelassen ist), da sich in der Formel dann genau der Nenner z^4 weghebt:
$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \left(z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right)''' = \frac{1}{6} \lim_{z\to 0} \sin'''(z) = -\frac{1}{6} \cos(0) = -\frac{1}{6}.$$

(b) Besonders einfach wird die Formel aus Lemma 11.8 für $m = 1$, also wenn in z_0 (höchstens) eine einfache Polstelle vorliegt. Dann ergibt sich durch Einsetzen
$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

Aufgabe 11.10. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{ord}_{z_0} f = 0$ und $\operatorname{ord}_{z_0} g = 1$ in einem Punkt $z_0 \in D$. Zeige, dass
$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Bemerkung 11.11 (*Partialbruchzerlegung* mit Residuen)**.** Mit Hilfe von Residuen lässt sich die aus den Grundlagen der Mathematik bekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen [G2, Aufgabe 12.44] aus einem ganz anderen Blickwinkel verstehen. Wir betrachten dazu eine meromorphe Funktion der Form
$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)}$$
für verschiedene $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und ein komplexes Polynom p von einem Grad kleiner als n. Offensichtlich hat f in jedem Punkt z_k für $k = 1, \dots, n$ höchstens eine einfache Polstelle. Die Laurent-Entwicklung von f in z_k beginnt also mit $\frac{a_k}{z - z_k}$, wobei
$$a_k = \lim_{z\to z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{p(z_k)}{(z_k - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})\,(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_n)} \tag{$*$}$$
nach Definition 11.6 und Beispiel 11.9 (b) das Residuum von f in z_k ist. Ziehen wir diese singulären Terme von f ab und betrachten
$$g(z) := \frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k},$$
so enthält die Laurent-Entwicklung dieses Ausdrucks um z_k also keine negativen Potenzen von $z - z_k$ mehr. Damit werden alle Singularitäten hebbar, und g ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Da der Grad von p aber kleiner als n ist, konvergiert g außerdem für $|z| \to \infty$ gegen 0. Dies bedeutet zum einen, dass g beschränkt und somit nach dem Satz 8.2 von Liouville konstant ist, und zum anderen, dass diese Konstante auch gleich 0 sein muss. Damit erhalten wir also die Partialbruchzerlegung
$$\frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k}$$
mit den durch $(*)$ bestimmten Konstanten a_k.

Beispiel 11.12. Wollen wir die Partialbruchzerlegung
$$\frac{2z - 1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-2} + \frac{a_3}{z-3}$$
finden, so erhalten wir mit Bemerkung 11.11 unmittelbar
$$a_1 = \frac{2\cdot 1 - 1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2\cdot 2 - 1}{(2-1)(2-3)} = -3, \quad a_3 = \frac{2\cdot 3 - 1}{(3-1)(3-2)} = \frac{5}{2}.$$

Wir haben nun alle Vorarbeiten für den bereits angekündigten Residuensatz geleistet. Wie in Bemerkung 11.11 ist auch hierbei die Idee, von einer Funktion mit isolierten Singularitäten die singulären Hauptteile abzuziehen, um eine holomorphe Funktion zu erhalten.

Satz 11.13 (**Residuensatz**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_1, \dots, z_m$ verschiedene Punkte in D, und $f \colon D \backslash \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $D \backslash \{z_1, \dots, z_m\}$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_{z_k} \gamma \cdot \mathrm{res}_{z_k} f.$$

Beweis. Wir entwickeln den Integranden gemäß Definition 10.3 in jedem Punkt z_k in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z - z_k)^n}_{=: f_k^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} (z - z_k)^n}_{=: f_k^+}.$$

Beachte dabei, dass diese Darstellung zwar nur lokal um z_k gilt, die Hauptteile f_k^- aber trotzdem auf $\mathbb{C} \backslash \{z_k\}$ definiert sind (denn ihre Konvergenzgebiete sind ja von der Form $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_k|\}$, und da wir hier wie in Definition 10.3 die Laurent-Entwicklung in den Punkten z_k betrachten, ist $r = 0$). Die Funktion

$$g \colon D \backslash \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(z) = f(z) - f_1^-(z) - \cdots - f_m^-(z)$$

ist also wohldefiniert und holomorph — wir können uns g so vorstellen, dass wir „von f die singulären Teile subtrahiert haben“. In der Tat ist dieses g nun auch holomorph in die Punkte z_k fortsetzbar, denn lokal um z_k gilt

$$g(z) = \underbrace{(f(z) - f_k^-(z))}_{= f_k^+(z)} - f_1^-(z) - \cdots - f_{k-1}^-(z) - f_{k+1}^-(z) - \cdots - f_m^-(z),$$

und in diesem Ausdruck sind alle Summanden holomorph bei z_k. Also ist g holomorph auf ganz D. Weil D nun einfach zusammenhängend und γ damit in D zusammenziehbar ist, folgt also $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ und damit durch Einsetzen der Definition von g

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma f_k^-(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_\gamma (z - z_k)^n\,dz.$$

Dabei ergibt sich für die zweite Gleichheit die Vertauschbarkeit des Integrals mit der Summe über n wieder aus der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden gemäß Folgerung 9.4 (b), da das kompakte Bild des Integrationsweges in einem abgeschlossenen Kreisring in $\mathbb{C} \backslash \{z_k\}$ liegen muss.

Da die Integrale $\int_\gamma (z - z_k)^n\,dz$ nun nach Bemerkung 11.1 und Definition 11.2 gleich 0 sind für $n \neq -1$ und gleich $2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}_{z_k} \gamma$ für $n = -1$, ergibt sich also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}_{z_k} \gamma,$$

woraus wegen $\mathrm{res}_{z_k} f = a_{-1}^{(k)}$ die Behauptung des Satzes folgt. □

Beispiel 11.14.

(a) Der einfachste Fall des Residuensatzes ist natürlich, wenn D einfach zusammenhängend und $f \colon D \to \mathbb{C}$ holomorph auf ganz D ist, wenn es also keine isolierten Singularitäten gibt. In diesem Fall ist einfach $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in D, wie ja auch aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt (siehe Folgerung 5.3 (b)).

(b) Es seien D einfach zusammenhängend, $z_0 \in D$, und $f \colon D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ von der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und eine auf ganz D holomorphe Funktion g. Dann folgt aus dem Residuensatz 11.13 für jeden geschlossenen Weg γ in $D \backslash \{z_0\}$ zunächst natürlich

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}_{z_0} \gamma \cdot \mathrm{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Mit Lemma 11.8 für $m = n+1$ können wir das hier auftretende Residuum einfach berechnen und erhalten

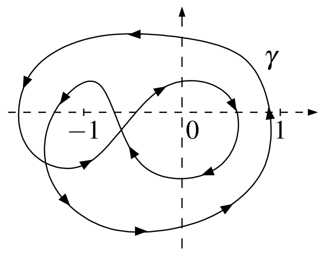
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{ind}_{z_0}\gamma\cdot\frac{1}{n!}\cdot\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{n+1}\cdot\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right)^{(n)}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{ind}_{z_0}\gamma\cdot\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.\end{aligned}$$

Ist γ eine Kreislinie um z_0, so ist nun $\mathrm{ind}_{z_0}\gamma = 1$, und wir erhalten genau die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel aus Satz 7.10 (b). Die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel ist in diesem Sinne also ein einfacher Spezialfall des Residuensatzes.

(c) Als Beispiel dafür, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene Wegintegrale sehr einfach berechnen kann, wollen wir nun das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)\sin z}\,dz$$

entlang des Weges aus Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmen, den wir hier rechts noch einmal dargestellt haben.



Der Integrand hat offensichtlich isolierte Singularitäten bei -1 sowie in den Punkten $k\cdot\pi$ für $k\in\mathbb{Z}$. Wählen wir für D z. B. die Kreisscheibe um 0 mit Radius 3, so liegt γ ganz in D, und f hat in diesem Gebiet nur die isolierten Singularitäten 0 und -1. Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)\sin z}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{ind}_{-1}\gamma\cdot\mathrm{res}_{-1}\frac{1}{(z+1)\sin z}+\mathrm{ind}_0\gamma\cdot\mathrm{res}_0\frac{1}{(z+1)\sin z}\right).$$

Die hier vorkommenden Umlaufzahlen haben wir bereits in Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmt: Es ist $\mathrm{ind}_{-1}\gamma = 2$ und $\mathrm{ind}_0\gamma = 0$. Also benötigen wir nur das Residuum des Integranden im Punkt -1, und das ergibt sich aufgrund der dort vorliegenden einfachen Polstelle nach Beispiel 11.9 (b) sofort zu

$$\mathrm{res}_{-1}\frac{1}{(z+1)\sin z} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\sin 1}.$$

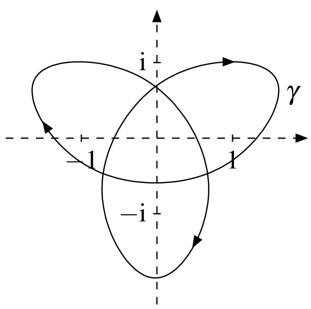
Also erhalten wir für das gesuchte Integral ohne komplizierte Rechnung das Ergebnis

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)\sin z}\,dz = -\frac{4\pi\mathrm{i}}{\sin 1}.$$

Aufgabe 11.15. Berechne das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3(z^2+1)}\,dz$$

für den im folgenden Bild eingezeichneten Weg γ:



Aufgabe 11.16. Es seien $D\subset\mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_0\in D$ und $f\colon D\backslash\{z_0\}\to\mathbb{C}$ holomorph.

Zeige, dass das Residuum $\operatorname{res}_{z_0} f$ die eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist, für die die auf $D \backslash \{z_0\}$ holomorphe Funktion $f(z) - \frac{c}{z-z_0}$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 11.17. Es sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ gilt.

Zeige, dass f dann eine rationale Funktion ist, also von der Form $\frac{p}{q}$ für zwei komplexe Polynome p und q.

Bemerkung 11.18 (Vereinfachte Schreibweisen des Residuensatzes)**.** In vielen Fällen lässt sich der Residuensatz 11.13 etwas einfacher hinschreiben:

(a) Ist D offen und einfach zusammenhängend und f auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten holomorph, so schreibt man für einen geschlossenen Weg γ in D, der die Singularitäten von f nicht trifft, die Formel des Residuensatzes oft einfach als

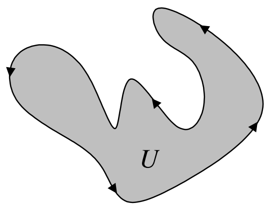
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in D} \operatorname{ind}_z \gamma \cdot \operatorname{res}_z f.$$

Natürlich steht hier nun auf der rechten Seite eigentlich eine Summe über alle (überabzählbar vielen) Punkte von D — aber da das Residuum von f nach Beispiel 11.7 (a) in allen Punkten gleich 0 ist, in denen keine isolierte Singularität vorliegt, ist die Konvention hier natürlich einfach, dass diese Summe als endliche Summe über die isolierten Singularitäten zu verstehen ist.

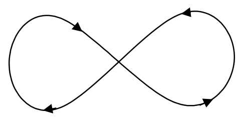
(b) Ein geschlossener Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt eine **Randkurve**, wenn die Umlaufzahl $\operatorname{ind}_z \gamma$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ gleich 0 oder 1 ist. In diesem Fall nennen wir

$$\begin{aligned} U = \{z \in D\backslash\gamma([a,b]) : \operatorname{ind}_z \gamma = 1\} &\quad \text{das } \textit{Innere} \text{ und} \\ \{z \in D\backslash\gamma([a,b]) : \operatorname{ind}_z \gamma = 0\} &\quad \text{das } \textit{Äußere} \text{ von } \gamma \end{aligned}$$

und sagen auch, dass γ eine Randkurve von U ist. Anschaulich bedeutet dies einfach, dass der Weg wie im folgenden Bild links einmal um U herum läuft. Das rechte Bild dagegen zeigt keine Randkurve, weil die Umlaufzahl des Weges um die Punkte im linken Gebiet der „Acht" gleich -1 ist.



Randkurve von U



keine Randkurve

Im Fall einer Randkurve γ mit Innerem U vereinfacht sich die Aussage des Residuensatzes offensichtlich zu

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in U} \operatorname{res}_z f,$$

wobei γ wieder in einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge D liegt und f auf
11 D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten in $D\backslash\gamma([a,b])$ holomorph ist.