14. Die Riemannsche Zetafunktion

Zum Abschluss dieses Skripts wollen wir noch ein paar sehr interessante Anwendungen unserer erarbeiteten Theorie betrachten, die zum einen enge Beziehungen der Funktionentheorie zur Zahlentheorie und Stochastik aufzeigen und zum anderen auch zu einem der berühmtesten derzeit ungelösten Probleme der Mathematik führen — der sogenannten Riemannschen Vermutung. Das Clay Mathematics Institute, eine große amerikanische Stiftung zur Förderung der mathematischen Forschung, hat diese Vermutung sogar zu einem ihrer „Millennium Problems“ ernannt und für einen korrekten Beweis ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt [C]!

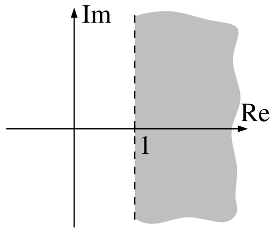
Da es in diesem Kapitel hauptsächlich um die Darstellung von Ideen und Zusammenhängen geht, werden wir hier für die meisten Aussagen nur noch die Beweisideen angeben und für einen kompletten, korrekten Beweis (insbesondere was Konvergenzabschätzungen betrifft) auf die Literatur verweisen.

Der Schlüssel zu den Anwendungen der Funktionentheorie in der Zahlentheorie ist die sogenannte Riemannsche Zetafunktion, die wir jetzt einführen werden. Wir benötigen dazu die allgemeine komplexe Potenz aus Aufgabe 7.16.

Lemma und Definition 14.1 (Die Riemannsche Zetafunktion)**.** *Die Reihe*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

konvergiert (absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 1$*. Die zugehörige Funktion* $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} \to \mathbb{C}$ *auf dem rechts eingezeichneten Gebiet wird die* ***Riemannsche Zetafunktion*** *genannt.*



Beweis. Schreiben wir wir üblich $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, so gilt nach der Definition der komplexen Potenz aus Aufgabe 7.16

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{(x+iy) \log n}| = |e^{x \log n}| \cdot \underbrace{|e^{iy \log n}|}_{=1} = n^x.$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

und diese reelle Reihe ist bekanntlich konvergent für $x > 1$ [G2, Aufgabe 12.42 (b)]. Also konvergiert die Reihe der Zetafunktion absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$. □

Bemerkung 14.2.

(a) Man kann leicht zeigen, dass die Zetafunktion in ihrem Definitionsgebiet sogar holomorph ist. Dazu genügt es nach Satz 7.5, durch eine einfache Abschätzung nachzuweisen, dass die durch formales Ableiten gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\log n}{n^z}$ auf jeder Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$ mit $a \in \mathbb{R}_{>1}$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Die Riemannsche Zetafunktion ist ein Spezialfall von sogenannten *Dirichlet-Reihen*, die allgemein die Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

mit komplexen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ haben. In der Tat werden wir in Satz 14.8 noch eine weitere Dirichlet-Reihe sehen, die den Kehrwert $z \mapsto \frac{1}{\zeta(z)}$ der Zetafunktion darstellt.

Dirichlet-Reihen sind in gewissem Sinne analog zu Potenzreihen, nur dass hier die Variable z im Exponenten und der Summationsindex n in der Basis der Potenz steht, während dies bei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ja genau umgekehrt ist. Dementsprechend haben viele Resultate für Potenzreihen auch ein Analogon für Dirichlet-Reihen — z. B. haben auch die Konvergenzgebiete von Dirichlet-Reihen immer eine feste Form; sie sind nämlich stets Halbebenen der Form $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (im Gegensatz zu Kreisscheiben für Potenzreihen). Genauere Informationen zu Dirichlet-Reihen finden sich z. B. in [FB, Kapitel VII.2].

Wir wollen nun die grundlegenden Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion studieren. Als Erstes wird man sich wahrscheinlich fragen, ob man zumindest einige spezielle Werte der Zetafunktion exakt berechnen kann. Der naheliegendste Wert ist dabei wohl

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

den man ja bereits in den „Grundlagen der Mathematik“ als eine der ersten Reihen kennenlernt, von denen man zwar die Konvergenz beweisen, jedoch zumindest mit einfachen Methoden nicht den Wert bestimmen kann [G2, Beispiel 7.19 (a)].

Mit Hilfe der Funktionentheorie können wir diesen Wert nun mit einer einfachen (und sehr überraschenden) Argumentation berechnen. Sie beruht letztlich darauf, wie bei der Partialbruchzerlegung in Bemerkung 11.11 oder beim Residuensatz 11.13 von einer geeigneten Funktion mit isolierten Singularitäten die Hauptteile abzuziehen.

Satz 14.3. *Es gilt*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweisidee. Um die Herleitung dieser Gleichung kurz zu halten und auf die wesentlichen Punkte zu reduzieren, geben wir hier nur die Beweisidee an. Die genauen Rechnungen (die allesamt einfach sind) kann man z. B. in [FB, Satz VII.3.1 und VII.4.1] nachlesen.

Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

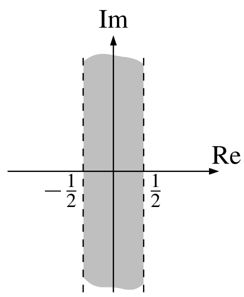
$$f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Sie hat im Nullpunkt offensichtlich einen Pol zweiter Ordnung. In der Tat lassen sich mit unseren Methoden aus den Kapiteln 10 und 11 leicht die ersten Terme der Laurent-Entwicklung von f im Nullpunkt berechnen: Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + (\text{Terme mit positiven Potenzen von } z) \qquad (*)$$

in einer Umgebung von 0. Wir wollen nun den Hauptteil z^{-2} dieser Reihe von f abziehen, um die Singularität dort zu entfernen. Da f offensichtlich periodisch mit Periode 1 ist, tun wir dies gleich an allen ganzen Zahlen und betrachten also die neue Funktion

$$g(z) = f(z) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2},$$



die jetzt um 0 holomorph ist. Da sie damit im rechts eingezeichneten Streifen $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ keine Singularitäten besitzt und ebenfalls Periode 1 hat, ist sie auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Gleichzeitig zeigt eine einfache Abschätzung aber auch, dass $g(z)$ in diesem Streifen für $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist g insbesondere eine auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkte holomorphe Funktion, die damit nach dem Satz 8.2 von Liouville konstant sein muss — und zwar wegen der gerade erwähnten Konvergenzaussage gleich 0.

Entwickeln wir g aber nun in eine Laurent-Reihe um 0, so erhalten wir mit $(*)$

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{z^2} - \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(-n)^2}}_{=2\zeta(2)} + \text{(Terme mit positiven Potenzen von } z\text{)}$$

in einer Umgebung von 0. Da g die Nullfunktion ist, muss hierbei insbesondere der z^0-Koeffizient verschwinden. Also ist $\frac{\pi^2}{3} - 2\zeta(2) = 0$, d. h. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. □

Bemerkung 14.4. Mit ähnlichen Methoden kann man die Werte der Riemannschen Zetafunktion an allen Punkten der Form $2n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ berechnen [FL, Satz VII.4.1]. Über die anderen Funktionswerte ist aber nur sehr wenig bekannt — diese Werte können in der Regel nur numerisch bestimmt werden.

Wir wollen nun einen ersten Zusammenhang der Riemannschen Zetafunktion mit der Zahlentheorie sehen.

Satz 14.5 (Eulersche Produktformel). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit* $\operatorname{Re} z > 1$ *gilt*

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-z}} = \zeta(z).$$

Beweisidee. Für eine feste Primzahl p können wir den entsprechenden Faktor im obigen Produkt wegen $|p^{-z}| < 1$ in eine (absolut konvergente) geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-p^{-z}} = \sum_{a=0}^{\infty} p^{-az}$$

entwickeln. Sind $p_1, \dots, p_m$ die ersten m Primzahlen, so ist also

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_m=0}^{\infty} (p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m})^{-z}.$$

Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen können wir dies offensichtlich auch als $\sum_n n^{-z}$ schreiben, wobei n über alle natürlichen Zahlen (außer der 0) läuft, deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ enthält.

Gehen wir in dieser Gleichung nun zum Grenzfall $m \to \infty$ über, so erhalten wir (nach einer Konvergenzuntersuchung, die man in [FB, Satz VII.2.8] nachlesen kann) auf der linken Seite das Produkt über alle Primzahlen und auf der rechten die Summe über n^{-z} für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, also genau $\zeta(z)$. □

Aufgrund dieses Beweises können wir die Eulersche Produktformel also auffassen als eine analytische Version der Aussage, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

Als Nächstes wollen wir untersuchen, ob und wo die Riemannsche Zetafunktion Nullstellen besitzt. Am einfachsten sieht man dies, wenn man den Kehrwert $\frac{1}{\zeta(z)}$ ebenfalls als Dirichlet-Reihe gemäß Bemerkung 14.2 (a) schreibt und auf Polstellen untersucht. Die darin auftretenden Koeffizienten sind durch die folgende Funktion gegeben, die ihr vielleicht schon aus der Vorlesung „Elementare Zahlentheorie" kennt.

Definition 14.6 (Möbius-Funktion)**.** Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ (mit verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und $a_1, \dots, a_m \geq 1$) definieren wir

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^m & \text{falls } a_1 = \cdots = a_m = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. $\mu(n)$ gibt an, ob n gerade oder ungerade viele verschiedene Primfaktoren hat bzw. ob n einen Primfaktor doppelt besitzt. Die so definierte Funktion $\mu\colon \mathbb{N}_{>0} \to \{-1,0,1\}$ wird **Möbius-Funktion** genannt.

Bemerkung 14.7 (Verteilung der Werte von μ)**.** Wenn man sich die Werte der Möbius-Funktion ansieht, kann man in ihnen zunächst einmal keinerlei Regelmäßigkeiten oder Häufungen einer der drei Werte -1, 0 und 1 feststellen — sie sehen praktisch wie eine Folge von Zufallszahlen aus. Hier ist z. B. ein willkürlich herausgegriffenes Stück der Funktionswerte:

n	$\cdots$	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	$\cdots$
$\mu(n)$	$\cdots$	0	1	0	-1	0	1	0	1	1	-1	0	-1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	-1	$\cdots$

Wir können für große n sogar bestimmen, wie oft $\mu(n)$ den Wert 0 annimmt: Für jede Primzahl p enthält genau eine von p^2 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen den Primfaktor p mindestens doppelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Menge $\{1,\dots,n\}$ zufällig ausgewählte Zahl den Primfaktor p höchstens einmal enthält, ist für große n also näherungsweise $1-p^{-2}$ (bzw. sogar exakt dieser Wert, falls n durch p^2 teilbar ist). Für verschiedene Primzahlen sind diese Wahrscheinlichkeiten nach dem chinesischen Restsatz [G1, Satz 11.22] unabhängig, und damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine solche Zahl jeden Primfaktor höchstens einmal enthält und die Möbius-Funktion damit ungleich 0 ist, in etwa

$$\prod_{p \text{ prim}} (1-p^{-2}) \overset{14.5}{=} \frac{1}{\zeta(2)} \overset{14.3}{=} \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608.$$

Die Möbius-Funktion nimmt also im Mittel für etwa 39,2 % aller Zahlen den Wert 0 an.

Ob die Werte 1 und -1 der Möbius-Funktion gleichverteilt sind, ist dagegen eine viel schwierigere Frage. In der Tat ist dies in gewissem Sinne bereits der Inhalt der Riemannschen Vermutung, wie wir in Bemerkung 14.14 und Satz 14.15 sehen werden.

Wie bereits angekündigt können wir nun mit Hilfe der Möbius-Funktion den Kehrwert der Zetafunktion als Dirichlet-Reihe schreiben.

Satz 14.8. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt*

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \quad \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere hat die Zetafunktion für $\operatorname{Re} z > 1$ also keine Nullstellen.

Beweis. Die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung konvergiert für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$, denn wegen $|\mu(n)| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Reihe der Zetafunktion eine nach Lemma 14.1 konvergente Majorante. Weiterhin ist nach Definition der Zetafunktion

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{(mn)^z} \tag{1}$$

Setzen wir hier $N = mn$, so tritt in dieser Reihe ein Term $\frac{1}{N^z}$ für jeden Teiler n von N auf — und dieser hat dann einen Koeffizienten von $\mu(n)$. Also können wir (1) umschreiben als

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{n|N} \mu(n) \right) \frac{1}{N^z}. \tag{2}$$

Nun ist aber für alle $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\sum_{n|N} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } N = 1, \\ 0 & \text{für } N > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Für $N = 1$ ist dies offensichtlich — und für $N > 1$ mit Primfaktorzerlegung $N = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ sind die in der Summe (3) auftretenden Teiler, die eine nicht-verschwindende Möbius-Funktion besitzen, gerade die 2^k Zahlen $p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ mit $b_1, \dots, b_k \in \{0,1\}$, von denen offensichtlich jeweils genau die Hälfte die Möbius-Funktion 1 bzw. -1 haben. Vielleicht kennt ihr die Aussage (3) auch bereits aus der „Elementaren Zahlentheorie“ als einen Spezialfall des sogenannten Möbiusschen Umkehrsatzes.

Setzt man nun (3) in (2) ein, so erhält man schließlich wie behauptet für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = 1. \qquad \square$$

Bemerkung 14.9. Wir haben mit Bemerkung 14.2 (b) und Satz 14.8 nun schon zwei Beispiele dafür gesehen, wie sich zahlentheoretische Eigenschaften in holomorphen Funktionen widerspiegeln können. Es gibt ein ganzes Teilgebiet der Mathematik, die sogenannte *analytische Zahlentheorie*, das diese Zusammenhänge genauer studiert und mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden Probleme der Zahlentheorie (vor allem zum Thema der Primzahlverteilung) untersucht.

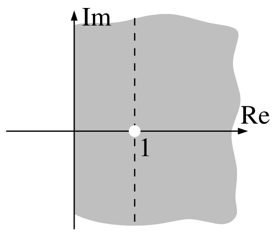
Bisher haben wir die Zetafunktion nur für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ untersucht, da die Reihe in Definition 14.1 für keine anderen Werte von z konvergiert. Allerdings haben wir ja schon bei Potenzreihen gesehen, dass eine Reihendarstellung durchaus nur auf einer Teilmenge des größtmöglichen Definitionsgebietes einer holomorphen Funktion gültig sein kann. Wir können uns daher fragen, ob die Riemannsche Zetafunktion vielleicht auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann (auf dem dann die Reihendarstellung aus Definition 14.1 nicht mehr gilt).

In der Tat ist dies möglich. Wir geben hier zunächst mit Hilfe einer weiteren Dirichlet-Reihe eine Möglichkeit an, wie man die Zetafunktion zumindest auf das Gebiet mit positivem Realteil holomorph fortsetzen kann.

Satz 14.10 (Holomorphe Fortsetzung der Zetafunktion)**.** *Die Vorschrift*

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$$

definiert eine auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \backslash \{1\}$ *holomorphe Funktion, die für alle* z *mit* $\operatorname{Re} z > 1$ *mit der Zetafunktion übereinstimmt.*



Beweisidee. Zunächst gilt nach Definition der Zetafunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^z}.$$

Da in dieser Kombination nur die Terme mit geradem n übrig bleiben, können wir dies auch als

$$\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^z} = 2^{1-z}\zeta(z)$$

umschreiben, woraus durch Auflösen nach $\zeta(z)$ sofort $\zeta(z) = \tilde{\zeta}(z)$ folgt.

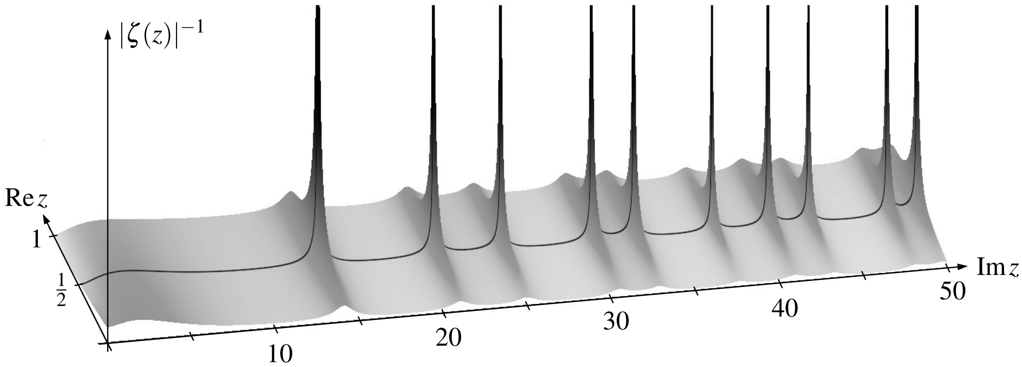
Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$. Ist z reell, so ergibt sich die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ bereits aus dem Leibniz-Kriterium [G2, Satz 7.8]. Für komplexe z folgt die Konvergenz und die Holomorphie von $\tilde{\zeta}$ damit aus der Existenz einer Konvergenzhalbebene wie in Bemerkung 14.2 (b) [FB, Aufgabe VII.2.1], oder alternativ indem man wie beim Beweis des Leibniz-Kriterium jeweils zwei aufeinander folgende Summanden zu einem zusammenfasst. Den Wert $z = 1$ müssen wir dabei aus dem Definitionsbereich heraus nehmen, da an dieser Stelle $1 - 2^{1-z} = 0$ ist. $\square$

Bemerkung 14.11.

(a) Im Gegensatz zur Reihe aus Definition 14.1 macht die Formel aus Satz 14.10 keinen besonders „natürlichen" Eindruck mehr. Man könnte daher denken, dass diese Fortsetzung der Zetafunktion recht willkürlich ist. Dem ist aber nicht so — denn wir haben ja im Identitätssatz in Folgerung 8.9 gesehen, dass zwei holomorphe Funktionen auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \backslash \{1\}$, die auf dem ursprünglichen Definitionsbereich $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ übereinstimmen, bereits gleich sein müssen! Die Funktion in Satz 14.10 ist also die *einzig mögliche* Fortsetzung der Zetafunktion auf dieses größere Gebiet. Wir bezeichnen sie daher ebenfalls mit ζ und nennen auch sie die Riemannsche Zetafunktion.

(b) Man kann zeigen, dass sich die Zetafunktion sogar holomorph nach $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortsetzen lässt [FB, Theorem VII.3.10]; wie in (a) ist diese Fortsetzung dann natürlich auch wieder eindeutig. Wir werden diese weitere Fortsetzung, deren Konstruktion deutlich komplizierter ist, im Folgenden aber nicht weiter untersuchen.

Nachdem wir die Zetafunktion nun (mit Ausnahme des Punktes 1) in die gesamte rechte Halbebene fortgesetzt haben, können wir die Frage nach den Nullstellen (siehe Satz 14.8) natürlich wieder aufgreifen und uns fragen, ob in dem neu hinzugekommenen Streifen $0 < \operatorname{Re} z < 1$, dem sogenannten *kritischen Streifen*, Nullstellen der Zetafunktion liegen. Um zuerst einmal numerisch einen Überblick über die Situation in diesem Streifen zu bekommen, lassen wir die Funktion zunächst von einem Computer zeichnen. Dabei müssen wir uns mit dem (reellwertigen) Betrag der Zetafunktion begnügen, da wir die komplexwertige Zetafunktion nicht in einem dreidimensionalen Bild darstellen können. Im folgenden Bild haben wir den *Kehrwert* des Betrags der Zetafunktion zeichnen lassen — auf diese Art werden die Nullstellen deutlicher sichtbar, nämlich als Polstellen des Kehrwerts. Da die Zetafunktion nach Definition die Gleichung $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ erfüllt und ihre Nullstellen somit symmetrisch zur reellen Achse liegen, haben wir uns zudem auf den Bereich mit positivem Imaginärteil beschränkt.



Aufgrund dieses Bildes sieht es so aus, als ob die Zetafunktion im kritischen Streifen Nullstellen besitzt, die zwar sehr ungleichmäßig verteilt sind, aber alle den Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Genau dies ist der Inhalt der sogenannten *Riemannschen Vermutung*:

Vermutung 14.12 (Riemannsche Vermutung). *Alle Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ *haben den Realteil* $\frac{1}{2}$.

Dieses Problem ist schon sehr lange bekannt — es wurde von Riemann bereits im 19. Jahrhundert formuliert. Obwohl ein Beweis dieser Vermutung für die Zahlentheorie (und auch andere Gebiete der Mathematik) weitreichende Folgen hätte und demzufolge schon sehr viele Mathematiker nach einem solchen Beweis gesucht haben, existiert bis heute nicht einmal ein vielversprechender Ansatz zur Lösung. Das Problem wurde im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute, einer der größten amerikanischen mathematischen Stiftungen, zu einem der „Millennium Problems" ernannt und mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar für den ersten korrekten Beweis versehen [C].

Bemerkung 14.13 (Numerische Überprüfung der Riemannschen Vermutung)**.** Nach aktuellem Stand der Forschung wurde die Riemannsche Vermutung für die ersten 10 Billionen Nullstellen im kritischen Streifen numerisch bewiesen, so dass wohl nur noch wenige Mathematiker an der Korrektheit der Vermutung zweifeln.

Vielleicht stellt ihr euch die Frage, wie man denn überhaupt von irgendeiner Nullstelle der Zetafunktion zeigen kann, dass ihr Realteil *exakt* gleich $\frac{1}{2}$ ist, wenn man die Funktion aufgrund ihrer Definition als unendliche Reihe doch numerisch immer nur näherungsweise bestimmen kann. Die Lösung dieses Problems besteht darin, dass man weiß, dass die Nullstellen der Zetafunktion symmetrisch zur Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ liegen müssen [FB, Theorem VII.3.10]. Wenn man also zeigen kann, dass die Zetafunktion in einem bestimmten Rechteck $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, a < \operatorname{Im} z < b\}$ (mit Vielfachheiten gezählt) genau eine Nullstelle besitzt, so kann diese nur Realteil $\frac{1}{2}$ haben, da ansonsten die gespiegelte Nullstelle auch noch in diesem Rechteck liegen müsste. Die Anzahl der Nullstellen von ζ in U ist aber mit Satz 13.2 gleich dem Null- und Polstellen zählenden Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz,$$

und dieses Integral kann man numerisch auswerten. Da es in jedem Fall eine ganze Zahl sein muss, genügt es, das Integral (mit korrekter Fehlerabschätzung) mit einem kleineren Fehler als $\frac{1}{2}$ zu berechnen, um seinen exakten Wert zu kennen.

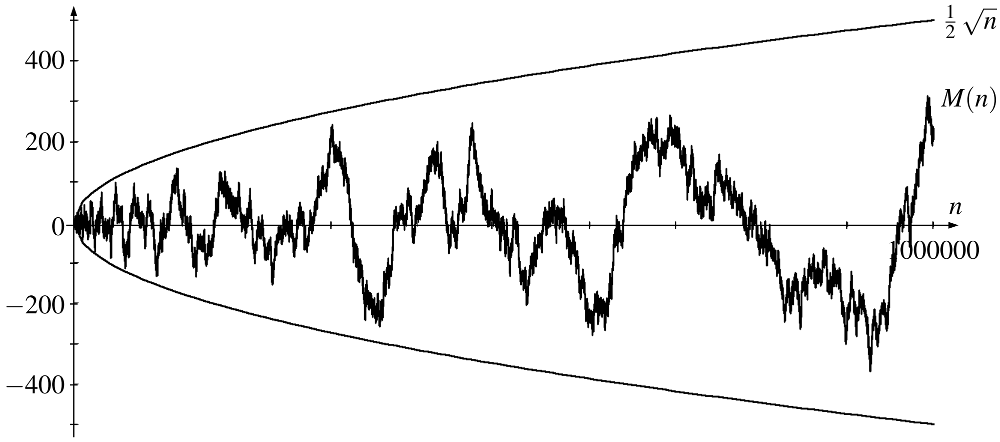
Dieses Verfahren funktioniert natürlich nur, wenn die Nullstellen der Zetafunktion auch wirklich einfach sind, da man zwischen einer doppelten Nullstelle mit Realteil $\frac{1}{2}$ und zwei einfachen Nullstellen, die nahe bei der Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ und symmetrisch zu ihr liegen, nicht unterscheiden könnte. Bisher haben sich aber alle gefundenen Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen als einfach herausgestellt.

Zum Abschluss wollen wir noch sehen, wie die Riemannsche Vermutung zahlentheoretisch interpretiert (und eventuell auch bewiesen) werden kann. Wir kommen dazu noch einmal auf die Möbius-Funktion aus Definition 14.6 zurück.

Bemerkung 14.14 (Die Möbius-Funktion als symmetrische Irrfahrt)**.** Wir hatten in Bemerkung 14.7 ja schon gesehen, dass es so aussieht, als ob die Möbius-Funktion mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte 1 und -1 annimmt. Dies kann man besonders gut an der aufsummierten Möbius-Funktion

$$M(n) := \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$$

sehen, die oft auch als *Mertens-Funktion* bezeichnet wird. Wäre $\mu(n) \in \{-1, 0, 1\}$ zufällig und symmetrisch verteilt (d. h. 1 und -1 treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf), so würde die Mertens-Funktion also die symmetrische Irrfahrt einer Person beschreiben, die gleich wahrscheinlich einen Schritt nach vorne oder hinten macht (wenn sie nicht stehen bleibt). Der folgende Graph der Mertens-Funktion scheint dies zu bestätigen.



Die Amplitude der Schwankungen von $M(n)$ scheint dabei in etwa proportional zu $\sqrt{n}$ zu wachsen. In der Tat hat Mertens ursprünglich vermutet, dass $|M(n)| \le \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, was sich inzwischen jedoch als falsch herausgestellt hat. Allerdings konnte dies bisher nur theoretisch gezeigt werden — vom kleinsten n, das diese Ungleichung verletzt, weiß man bisher nur, dass es größer als 10^{14} sein muss (bis dahin hat man nämlich erfolglos numerisch nach einem Gegenbeispiel gesucht), aber kleiner als $10^{10^{40}}$ (was vermutlich ein Resultat von nur zweifelhaftem praktischen Nutzen ist).

Das sogenannte *Gesetz des iterierten Logarithmus* aus der Stochastik besagt jedoch, dass bei einer tatsächlich zufälligen symmetrischen Irrfahrt für $n \to \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Abschätzung

$$|M(n)| \le c\sqrt{n \log\log n} \tag{$*$}$$

für eine geeignete Konstante c gelten würde. Leider kann man dieses Resultat hier natürlich nicht anwenden, da die Mertens-Funktion ja in Wirklichkeit gar keine Zufallsbewegung ist, sondern eine völlig deterministische zahlentheoretische Funktion. Dennoch würde man natürlich erwarten, dass diese Abschätzung gilt — und in diesem Fall würde dies, wie wir jetzt sehen wollen, in der Tat die Riemannsche Vermutung beweisen. Wir benötigen dazu nur die etwas abgeschwächte Form

$$|M(n)| \le c n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$, die offensichtlich aus $(*)$ folgt, da $\sqrt{\log\log n}$ für $n \to \infty$ langsamer wächst als die Potenzfunktion n^{ε}.

Satz 14.15. *Gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante c mit $|M(n)| \le c n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Riemannsche Vermutung wahr.*

Beweisidee. Wie schon in Bemerkung 14.13 erwähnt, liegen die Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen symmetrisch zur Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Es genügt also zu zeigen, dass $\zeta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ gilt. Dafür wiederum reicht es nach Satz 14.8 zu beweisen, dass die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(z)}{n^z}$ konvergiert (und damit gleich $\frac{1}{\zeta(z)}$ ist).

Es sei also $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x = \frac{1}{2} + 2\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir setzen die Definition der Mertens-Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}_{\ge 0}$ fort, indem wir $M(t) := M(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [n, n+1)$ setzen, und rechnen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^z} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} M(n)\,(n^{-z} - (n+1)^{-z}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \int_n^{n+1} z t^{-z-1}\,dt \\
&= z \int_1^{\infty} M(t)\, t^{-z-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$|t^{-z-1}| = |\mathrm{e}^{(-x-\mathrm{i}y-1)\log t}| = |\mathrm{e}^{(-x-1)\log t}| = t^{-x-1} = t^{-\frac{3}{2}-2\varepsilon},$$

und damit ist dieses Integral wegen

$$\int_1^{\infty} |M(t)\, t^{-z-1}|\,dt \le \int_1^{\infty} c t^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\frac{3}{2}-2\varepsilon} = c\int_1^{\infty} t^{-1-\varepsilon}\,dt = -\frac{c}{\varepsilon}\left[t^{-\varepsilon}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{\varepsilon}$$

absolut konvergent. □

In der Tat kann man sogar zeigen, dass die Abschätzung aus Satz 14.15 äquivalent zur Riemannschen Vermutung ist. Wir haben damit also eine Möglichkeit gefunden, wie man die Riemannsche Vermutung vollständig in die Zahlentheorie übersetzen kann: Sie ist letztlich eine Aussage darüber, ob die Werte 1 und -1 in der Möbius-Funktion wirklich gleichverteilt sind, bzw. ob sich damit die Mertens-Funktion wie eine symmetrische Zufallsbewegung verhält. Auch viele andere zahlentheoretische Fragen zur Verteilung von Primzahlen lassen sich auf die Riemannsche Vermutung zurückführen. 13