6. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Wir werden nun damit beginnen, einige erste interessante Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz herzuleiten. Als Erstes wollen wir noch einmal die bereits in den letzten Kapiteln gestellte wichtige Frage untersuchen, wann das Wegintegral über eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt. Wir wissen bereits, dass dies der Fall ist, wenn

- f eine Stammfunktion besitzt (Lemma 3.10), oder
- f holomorph und D einfach zusammenhängend ist (Folgerung 5.12 (b)).

In der Tat hängen diese beiden Bedingungen sehr eng miteinander zusammen. Wir werden jetzt sehen, dass die erste aus der zweiten folgt, und später in Folgerung 8.1 auch umgekehrt zeigen, dass eine Funktion, die (lokale) Stammfunktionen besitzt, auch holomorph sein muss.

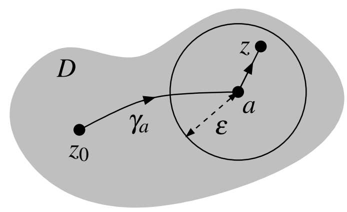
Satz 6.1 (Existenz von Stammfunktionen)**.** *Es sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer einfach zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{C}$. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf D.*

Beweis. Wir wählen einen beliebigen Punkt $z_0 \in D$. Da D zusammenhängend ist, können wir weiterhin für alle $z \in D$ einen beliebigen Weg γ_z von z_0 nach z wählen. Damit definieren wir nun eine Funktion $F: D \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

und behaupten, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Es sei dazu $a \in D$ beliebig; wir zeigen, dass F in a komplex differenzierbar mit Ableitung $f(a)$ ist. Weil D offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a ganz in D liegt. Da weiterhin F nach Folgerung 5.12 (b) nicht von den gewählten Wegen γ_z abhängt, können wir wie im Bild rechts annehmen, dass γ_z für alle $z \in U_\varepsilon(a)$ zunächst auf einem festen Weg γ_a von z_0 nach a und dann entlang der geraden Verbindungsstrecke von a nach z verläuft.



Insbesondere ist dann $F(z) - F(a) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw - \int_{\gamma_a} f(w)\,dw$ für alle $z \in U_\varepsilon(a)$ einfach das Integral von f entlang der geraden Strecke $\overline{az}$. Damit folgt für alle $z \in U_\varepsilon(a)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| &= \left|\left(\frac{1}{z-a} \cdot \int_{\overline{az}} f(w)\,dw\right) - f(a)\right| \\ &= \frac{1}{|z-a|} \cdot \left|\int_{\overline{az}} (f(w)-f(a))\,dw\right| \\ &\le \max_{w \in \overline{az}} |f(w)-f(a)|. \qquad \text{(Lemma 4.4 (b))}\end{aligned}$$

Für $z \to a$ (und damit auch $w \to a$) konvergiert dieser Ausdruck wegen der Stetigkeit von f gegen 0. Also ist F komplex differenzierbar in a mit Ableitung $f(a)$. □

Bemerkung 6.2. Die Idee des Beweises von Satz 6.1 ist in der Tat sehr einfach: Wie wir aus der reellen Analysis wissen, sollte die Stammfunktion F von f natürlich einfach durch das Integral „$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$“ gegeben sein. In der komplexen Analysis ergibt dies aber erst einen Sinn, nachdem wir einen Weg von z_0 nach z gewählt haben — und um sicherzustellen, dass das Ergebnis nicht von diesem Weg abhängt, setzen wir voraus, dass D einfach zusammenhängend und f holomorph ist (siehe Folgerung 5.12 (b)).

Beispiel 6.3. Wir hatten in Beispiel 3.11 (a) bereits gesehen, dass die holomorphe Funktion f mit $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine Stammfunktion besitzt. In der Tat ist $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ auch nicht einfach zusammenhängend und Satz 6.1 damit nicht anwendbar. Verkleinern wir den Definitionsbereich jedoch z. B. auf die sternförmige und damit einfach zusammenhängende Menge $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$, so besagt Satz 6.1, dass f auf dieser Menge eine Stammfunktion besitzen muss. Eine solche Stammfunktion — den komplexen Logarithmus — haben wir in Aufgabe 3.13 auch schon kennengelernt.

Dieses Verkleinern des Definitionsbereichs zu einer einfach zusammenhängenden Menge lässt sich natürlich stets anwenden, da es um jeden Punkt einer offenen Menge D ja zumindest eine (einfach zusammenhängende) ε-Umgebung gibt, die noch ganz in D liegt. Man formuliert Satz 6.1 daher oft auch so:

Folgerung 6.4 (Existenz lokaler Stammfunktionen)**.** *Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, so hat jedes $a \in D$ eine Umgebung in D, auf der f eine Stammfunktion besitzt.*

Aufgabe 6.5. Es sei $D \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ offen und einfach zusammenhängend mit $1 \in D$. Man zeige:

(a) Es gibt genau eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf D, die an der Stelle 1 den Wert 0 hat. Wie hängt diese Funktion mit dem in Aufgabe 3.13 eingeführten Logarithmus zusammen?

(b) Es gibt genau eine Wurzelfunktion auf D, also genau eine *stetige* Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in D$, die an der Stelle 1 den Wert 1 hat. Wir bezeichnen sie mit $f(z) = \sqrt{z}$.

(c) Die Wurzelfunktion aus (b) erfüllt i. A. *nicht* $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\cdot\sqrt{w}$ für alle $z,w \in D$ mit $zw \in D$; es gilt jedoch stets $\sqrt{zw} = \pm\sqrt{z}\cdot\sqrt{w}$.

(d) Es gibt keine stetige Wurzelfunktion auf ganz $\mathbb{C}$.

Warum ist also die scheinbar widersprüchliche Rechnung $-1 = i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ falsch?

Aufgabe 6.6. Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen und konvexen Menge D. Beweise:

(a) Gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.

(Hinweis: Man schaue sich noch einmal den Beweis von Satz 6.1 an.)

(b) Gibt es eine Gerade $L \subset \mathbb{C}$, so dass f auf $D\backslash L$ holomorph ist, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.

(Wir werden später in Folgerung 8.1 „(c) $\Rightarrow$ (a)“ noch sehen, dass f damit dann automatisch auch holomorph ist.)

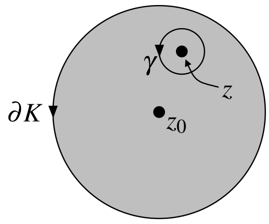
Wir wollen nun aus dem Cauchyschen Integralsatz noch einige andere Eigenschaften herleiten, die aus der Sicht der reellen Analysis sehr überraschend sind. Die erste besagt, dass eine holomorphe Funktion im Inneren eines Kreises (oder auch eines anderen Gebietes) schon eindeutig bestimmt ist, wenn wir sie nur *auf dem Rand* dieses Kreises (bzw. Gebietes) kennen:

Satz 6.7 (**Cauchysche Integralformel**)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ein Kreis in D. Dann gilt für alle $z \in \mathring{K}$, also alle z im Inneren dieses Kreises,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Insbesondere ist f auf dem Kreis K also durch die Werte auf dem Rand ∂K bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir berechnen das Wegintegral auf der rechten Seite der zu beweisenden Formel.



Da der Integrand auf der Menge $D\backslash\{z\}$ holomorph ist, können wir den Integrationsweg ∂K nach Folgerung 5.3 (a) durch einen anderen, in $D\backslash\{z\}$ homotopen Weg γ ersetzen. Wir wählen für γ wie im Bild rechts eine kleine Kreislinie mit Radius ε um z (die man offensichtlich aus ∂K durch eine Deformation in $D\backslash\{z\}$ erhalten kann).

Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw}_{\text{(A)}}+\underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{w-z}\,dw}_{\text{(B)}}.\end{aligned}$$

Beachte, dass der Integrand in (A) (als Funktion von w) nach z stetig fortsetzbar ist — und zwar durch die Ableitung $f'(z)$. Für festes z nimmt damit die auf der kompakten Menge K stetige Funktion $w \mapsto \left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right|$ ein Maximum $M \in \mathbb{R}$ an. Also können wir (A) nach Lemma 4.4 (b) betragsmäßig nach oben abschätzen durch $\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon \cdot M$. Insbesondere konvergiert (A) also gegen 0 für $\varepsilon \to 0$.

Den Term (B) hingegen können wir mit Hilfe der Substitution $u = w - z$ und Beispiel 3.5 (a) sofort ausrechnen zu

$$\text{(B)} = \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w-z|=\varepsilon}\frac{1}{w-z}\,dw = \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|u|=\varepsilon}\frac{1}{u}\,du = \frac{f(z)}{2\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i} = f(z).$$

Insgesamt erhalten wir damit also für $\varepsilon \to 0$ wie behauptet

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \text{(A)}+\text{(B)} = 0+f(z) = f(z). \qquad \square$$

Bemerkung 6.8.

(a) Natürlich können wir den Integrationsweg in der Cauchyschen Integralformel auch durch jeden anderen in $D\backslash\{z\}$ zu ∂K homotopen Weg ersetzen — so wie wir das ja auch im Beweis des Satzes getan haben. Insbesondere kommt es also wieder einmal nicht darauf an, dass K wirklich ein Kreis ist, sondern wir können auf dieselbe Art zeigen, dass „eine in einem gewissen Bereich holomorphe Funktion bereits durch die Funktionswerte auf dem Rand dieses Bereiches eindeutig bestimmt ist".

(b) Beachte jedoch, dass wir für die Cauchysche Integralformel *voraussetzen* müssen, dass f überall im Inneren von K holomorph ist, auch wenn das Integral auf der rechten Seite die Werte von f im Inneren von K überhaupt nicht verwendet! Versuchen wir z. B., die Cauchysche Integralformel auf die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf der Einheitskreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ anzuwenden, so würden wir

$$\frac{1}{z} \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{1}{w(w-z)}\,dw$$

erhalten, was zumindest für kleine z nicht richtig sein kann, da die linke Seite dieser Gleichung für $z \to 0$ betragsmäßig unendlich wächst, während auf der rechten Seite der Integrand auf dem betrachteten Weg (und damit auch das Integral) für $z \to 0$ beschränkt bleibt. In der Tat wird das Ergebnis von Aufgabe 6.10 (b) zeigen, dass obige Gleichung für *alle* z im Inneren von K falsch ist.

Beispiel 6.9.

(a) Ist f holomorph auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe und konstant auf dem Rand dieses Kreises, so ist f bereits auf der ganzen Kreisscheibe konstant (denn die konstante Funktion ist eine holomorphe Funktion mit den „richtigen" Werten auf dem Rand, also kann es nach Satz 6.7 keine weitere geben).

(b) Die Cauchysche Integralformel liefert manchmal eine einfache Möglichkeit, Kurvenintegrale entlang geschlossener Wege über Funktionen zu berechnen, die im vom Weg begrenzten Bereich mit Ausnahme eines einzelnen Punktes holomorph sind. So ergibt sich z. B. das Integral
$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+1}\, dw$$
mit Hilfe von Satz 6.7 (für $f(w) = e^w$ und $z = -1$) sofort zu $2\pi i \cdot f(-1) = \frac{2\pi i}{e}$, da der Integrationsweg einmal in positiver Richtung um den Punkt z herumläuft. Im Gegensatz dazu ist aber nach dem Cauchyschen Integralsatz
$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+3}\, dw = 0,$$
denn hier ist der Integrand holomorph im Inneren des Integrationskreises — der Integrationsweg läuft in diesem Fall nicht um den Punkt $z = -3$ herum, sondern ist zusammenziehbar in $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$.

Die Cauchysche Integralformel funktioniert in der obigen Form bisher jedoch in der Regel noch nicht zur Integralberechnung, wenn f an mehreren Stellen innerhalb des Integrationsweges nicht holomorph ist und / oder der Integrand nicht von der Form $\frac{f(w)}{w-z}$ mit einer holomorphen Funktion f ist. Diese Fälle werden wir später mit Hilfe des Residuensatzes 11.13 behandeln.

Aufgabe 6.10. Man berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=2} \frac{e^z}{z^3+1}\, dz,$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z(z-w)}\, dz$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \neq 1$.

Aufgabe 6.11. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, für die $f(z) = \bar{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt.

Das folgende Lemma ist eine einfache Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel:

Lemma 6.12 (Mittelwertprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ ein abgeschlossener Kreis, der ganz in D liegt. Dann gilt*
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt,$$
d. h. „der Funktionswert von f am Mittelpunkt z_0 von K ist der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Rand ∂K“.

Beweis. Aus der Cauchyschen Integralformel in Satz 6.7 folgt
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz.$$
Mit der Parametrisierung $\gamma\colon [0,2\pi] \to D$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$ des Integrationsweges ist also wie behauptet nach Definition 3.3 (c)
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\, i r e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \qquad \square$$

Bemerkung 6.13. Beachte, dass das Integral in Lemma 6.12 kein Wegintegral, sondern ein „gewöhnliches“ (komplexes) Integral über eine reelle Variable ist. Demzufolge gilt hier auch *keine* Homotopieinvarianz wie in Folgerung 5.3, d. h. es ist *nicht* richtig, dass der Funktionswert von f an einem Punkt z_0 gleich dem Mittelwert der Funktionswerte von f auf einer *beliebigen* Kurve ist, die einmal um z_0 herum läuft.

Aus der Tatsache, dass bei einer holomorphen Funktion f der Wert in jedem Punkt z_0 gleich dem Mittelwert der Funktionswerte auf einer Kreislinie um z_0 ist, folgt nun sofort die weitere sehr erstaunliche Tatsache, dass f nirgends ein (betragsmäßiges) lokales Maximum besitzen kann, sofern die Funktion nicht schon konstant war:

Satz 6.14 (**Maximumprinzip**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $z_0 \in D$ ein Punkt, an dem die Funktion $|f|$ ein lokales Maximum hat (d. h. es gelte $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle z in einer Umgebung von z_0). Dann ist f bereits konstant in einer Umgebung von z_0.*

Beweis. Es sei $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$ ein Kreis, auf dem f bei z_0 ein *globales* Maximum hat. Dann folgt aus dem Mittelwertprinzip für alle r mit $0 < r < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})\,dt \right| && \text{(Lemma 6.12)} \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})|\,dt \\ &\overset{(*)}{\le} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt && \text{(Voraussetzung)} \\ &= |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Es muss in dieser Ungleichungskette also überall die Gleichheit gelten. Insbesondere folgt aus der Gleichheit in $(*)$ (und der Stetigkeit von $|f|$) also $|f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})| = |f(z_0)|$ für alle $0 < r < \varepsilon$ und $t \in [0, 2\pi]$. Damit ist $|f|$ konstant auf $U_\varepsilon(z_0)$, nach Aufgabe 2.19 (c) also auch f. □

05

Eine zum Maximumprinzip analoge Aussage gibt es auch für das Minimum:

Folgerung 6.15 (**Minimumprinzip**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat dann $|f|$ in einem Punkt z_0 ein lokales Minimum und ist dieses Minimum ungleich 0, so ist f bereits konstant in einer Umgebung von z_0.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip, angewendet auf die Funktion $\frac{1}{f}$. □

Bemerkung 6.16.

(a) Beim Minimumprinzip ist es sehr wichtig vorauszusetzen, dass das betrachtete Betragsminimum ungleich 0 ist. Ohne diese Voraussetzung ist der Satz offensichtlich falsch: Da Beträge ja nie negativ sein können, liegt schließlich an jeder Nullstelle von f ein lokales Betragsminimum vor — und natürlich ist es falsch, dass eine holomorphe Funktion in der Umgebung einer Nullstelle stets konstant ist.

(b) Beim Maximum- und Minimumprinzip haben wir aus der Existenz eines lokalen Betragsmaximums bzw. -minimums einer holomorphen Funktion f in einem Punkt z_0 geschlossen, dass f bereits konstant in einer Umgebung von z_0 sein muss. Ist der betrachtete Definitionsbereich D von f zusammenhängend, so wird in der Tat später aus dem Identitätssatz folgen, dass f dann sogar konstant auf ganz D ist (siehe Bemerkung 8.11 (b)).

Oftmals findet man das Maximum- bzw. Minimumprinzip in der Literatur in der Formulierung, dass „holomorphe Funktionen ihr Betragsmaximum bzw. -minimum auf dem Rand annehmen“:

Folgerung 6.17 (Maximum- bzw. Minimumprinzip, 2. Version). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt sowie $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf D. Dann wird das absolute Betragsmaximum von f auf $\overline{D}$ (das wegen der Stetigkeit von f auf der kompakten Menge $\overline{D}$ existiert) auf dem Rand von D angenommen. Dasselbe gilt für das absolute Betragsminimum, sofern es ungleich 0 ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für das Betragsmaximum $M := \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}\}$, die Aussage über das Minimum ergibt sich natürlich analog.

Es sei $K := \{z \in \overline{D} : |f(z)| = M\}$ die Menge, auf der das Betragsmaximum angenommen wird. Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{M\}$ unter der stetigen Abbildung $|f|$ ist K abgeschlossen [G2, Satz 24.20 (c)]. Wir wählen nun einen beliebigen Randpunkt $a \in \partial K \subset K$ dieser Menge. Läge K komplett in D, so wäre also $a \in D$, und $|f|$ würde zwar im Punkt a, nicht aber in einer ganzen Umgebung von a das Betragsmaximum annehmen. Dieser Widerspruch zu Satz 6.14 zeigt, dass $K \not\subset D$ gelten muss, das Betragsmaximum von f also (auch) auf dem Rand von D angenommen wird. □

Aufgabe 6.18. Es seien $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge D sowie $K \subset D$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Man zeige:

(a) Ist f auf K nicht konstant, aber $|f|$ auf ∂K konstant, so hat f in K eine Nullstelle.

(b) Die Funktion $\operatorname{Re} f$ nimmt auf K ihr Maximum auf dem Rand ∂K an.

Mit Hilfe des Minimumprinzips können wir einen weiteren einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra geben — einen ersten hatten wir ja bereits in Aufgabe 4.7 (b) gesehen. Wir werden später in dieser Vorlesung noch andere Beweise hierfür kennenlernen.

Satz 6.19 (**Fundamentalsatz der Algebra**, 2. Beweis). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass das Polynom $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ den Leitkoeffizienten 1 hat. Nach Aufgabe 4.7 (a) gibt es dann ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Durch eventuelles Vergrößern von R können wir also annehmen, dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Betrachten wir nun die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, so besagt diese Abschätzung gerade, dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 > |a_0| = |f(0)|$$

für alle $z \in \partial K$ ist. Das absolute Betragsminimum von $|f|$ auf K wird also sicher nicht auf dem Rand ∂K angenommen, denn wir haben mit dem Nullpunkt ja in jedem Fall schon einen Punkt im Inneren von K gefunden, an dem $|f|$ kleiner ist als überall auf dem Rand. Da f natürlich holomorph ist, ist dies nach dem Minimumprinzip wie in Folgerung 6.17 aber nur möglich, wenn das Betragsminimum von f gleich 0 ist — und das heißt ja gerade, dass f in K eine Nullstelle besitzt. □