8. Folgerungen aus der Potenzreihenentwicklung

Nachdem wir nun gesehen haben, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben lassen, werden wir in diesem Kapitel einige wichtige und überraschende Folgerungen aus dieser Tatsache herleiten. Als Erstes wollen wir dafür zur besseren Übersicht noch einmal unsere bisherigen Resultate zusammenfassen und auflisten, welche Eigenschaften einer komplexen Funktion zur Holomorphie äquivalent sind.

Folgerung 8.1. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(a) *f ist holomorph (d. h. in jedem Punkt $z \in D$ einmal komplex differenzierbar);*

(b) *f ist auf D unendlich oft komplex differenzierbar;*

(c) *f besitzt um jeden Punkt $z \in D$ lokale Stammfunktionen;*

(d) *f ist analytisch (d. h. lässt sich lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben);*

(e) *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9.*

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (d)“ ist Satz 7.10, „(d) $\Rightarrow$ (b)“ ist Folgerung 7.8, und „(b) $\Rightarrow$ (a)“ ist trivial. Dies zeigt die Äquivalenz dieser drei Punkte.

Die Äquivalenz von (a) und (e) ist genau Satz 2.9.

Die Aussage „(a) $\Rightarrow$ (c)“ ist Folgerung 6.4. Um „(c) $\Rightarrow$ (a)“ zu sehen setzen wir voraus, dass f um einen Punkt $z_0 \in D$ eine lokale Stammfunktion F besitzt. Da diese natürlich holomorph ist, ist sie nach „(a) $\Rightarrow$ (b)“ (was wir schon gezeigt haben) sogar unendlich oft differenzierbar. Insbesondere ist $f = F'$ damit komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0) = F''(z_0)$. □

Wir sehen also noch einmal, dass die komplexe Analysis hier deutlich schöner ist als die reelle, da die Unterschiede zwischen den ganzen verschiedenen Differenzierbarkeitseigenschaften, die in der reellen Analysis oft große Probleme bereiten (n-mal differenzierbar, n-mal stetig differenzierbar, analytisch. . .), in der komplexen Analysis nicht existieren.

Unser erstes neues Resultat in diesem Kapitel ist die aus der Sicht der reellen Analysis sicher unerwartete Tatsache, dass jede auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkte holomorphe Funktion automatisch konstant ist.

Satz 8.2 (**Satz von Liouville**). *Jede beschränkte holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin lässt sich die Funktion f nach Satz 7.10 auf ganz $\mathbb{C}$ durch ihre Taylor-Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ mit Entwicklungspunkt 0 darstellen. Es genügt also zu zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \ge 1$.

Dies erhalten wir aber sofort aus der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| && \text{(Satz 7.10 (b))} \\
&\le \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\
&= \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \\
&\le \frac{M\, n!}{r^n},
\end{aligned}
$$

wenn wir dort den Grenzwert für $r \to \infty$ bilden. □

Bemerkung 8.3 (Ganze Funktionen)**.** Im Satz von Liouville ist es natürlich wesentlich, dass die betrachtete Funktion auf der *gesamten komplexen Zahlenebene* und nicht nur auf einer offenen Teilmenge definiert ist — so ist die Identität $f(z) = z$ z. B. zwar auf der offenen Einheitskreisscheibe beschränkt, aber dort natürlich nicht konstant. Funktionen, die auf der gesamten komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ definiert und holomorph sind, werden in der Literatur oft als **ganze Funktionen** bezeichnet. Der Satz von Liouville besagt in dieser Sprechweise also, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes:

Aufgabe 8.4. Es sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $r, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ ist (d. h. „f wächst höchstens polynomial vom Grad n für $z \to \infty$").

Zeige, dass f dann schon ein Polynom vom Grad höchstens n sein muss.

Aufgabe 8.5. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **dicht** in $\mathbb{C}$, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ gleich der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist, d. h. wenn in *jeder* Umgebung *jedes* Punktes von $\mathbb{C}$ mindestens ein Punkt aus A liegt.

Es sei nun $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeige, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dann dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 8.6. Es seien $f, g: D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Man zeige:

(a) Gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so ist $f = e^h$ für eine holomorphe Funktion $h: D \to \mathbb{C}$.

(b) Gilt $f^2 + g^2 = 1$ auf D, so ist $f = \cos h$ und $g = \sin h$ für eine holomorphe Funktion $h: D \to \mathbb{C}$.

Mit dem Satz von Liouville können wir einen weiteren einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben:

Satz 8.7 (**Fundamentalsatz der Algebra**, 3. Beweis)**.** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei f ein Polynom ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Nach Aufgabe 4.7 (a) gibt es eine Konstante $R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}\,|z|^n \geq \frac{1}{2} R^n \quad \text{für alle } |z| \geq R.$$

Damit ist die Funktion $\frac{1}{f}$ auf der Menge $\{z : |z| \geq R\}$ durch $\frac{2}{R^n}$ beschränkt. Auf der kompakten Menge $\{z : |z| \leq R\}$ ist die stetige Funktion $\frac{1}{f}$ natürlich ebenfalls durch eine Konstante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt. Also ist $\frac{1}{f}$ auf ganz $\mathbb{C}$ (durch das Maximum der beiden Zahlen $\frac{2}{R^n}$ und M) beschränkt. Nach dem Satz 8.2 von Liouville ist $\frac{1}{f}$ damit konstant, und demzufolge auch das Polynom f. □

Noch überraschender als der Satz von Liouville ist vielleicht der sogenannte Identitätssatz, der besagt, dass zwei holomorphe Funktionen, die auf einer „recht kleinen" Menge übereinstimmen, bereits überall gleich sein müssen. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Hilfssatz.

Lemma 8.8. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ nicht leer, offen und zusammenhängend. Ferner sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind äquivalent:*

(a) *$f = 0$, d. h. f ist die Nullfunktion;*

(b) *es ist $f|_A = 0$ für eine Teilmenge $A \subset D$, die einen Häufungspunkt in D besitzt (der aber nicht notwendig in A liegen muss);*

(c) *es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Aussage „(a) $\Rightarrow$ (b)" ist trivial (wir können z. B. $A = D$ wählen, da jeder Punkt einer offenen Menge D Häufungspunkt von D ist).

(b) $\Rightarrow$ (c): Es sei $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von A. Angenommen, es wäre $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir n minimal mit dieser Eigenschaft, so liefert die Taylor-Entwicklung von f um z_0 nach Satz 7.10

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \\ &= (z-z_0)^n \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0) + \cdots\right)}_{(*)} \end{aligned}$$

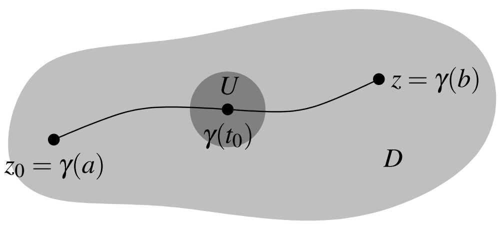
in einer Umgebung von z_0. Setzen wir $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ auf $D\backslash\{z_0\}$, so wird $g(z)$ also für alle $z \neq z_0$ in dieser Umgebung durch die Potenzreihe $(*)$ dargestellt. Insbesondere ist g damit stetig nach z_0 fortsetzbar, und zwar mit Funktionswert $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Weil z_0 nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von A ist, gibt es nun eine Folge $(z_m)_{m \in \mathbb{N}_{>0}}$ in $A\backslash\{z_0\}$, die gegen z_0 konvergiert. Nach Definition von A gilt $f(z_m) = 0$ und damit auch $g(z_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Da g stetig in z_0 ist, muss damit aber auch $0 = g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ gelten, im Widerspruch zur Wahl von n. Also war unsere Annahme falsch, d. h. es gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Es sei $z \in D$ beliebig; wir müssen zeigen, dass $f(z) = 0$. Da D zusammenhängend ist, können wir einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to D$ von z_0 nach z wählen. Wir betrachten nun die Menge

$$I := \{t \in [a,b] : f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \text{ für alle } n \geq 0\},$$

also die Menge aller Punkte des Weges, an denen alle Ableitungen von f (inklusive der „0-ten Ableitung", also des Funktionswertes von f) verschwinden. Nach Voraussetzung ist $a \in I$, d. h. I ist nicht leer. Außerdem ist I natürlich beschränkt und abgeschlossen (da I durch Gleichungen zwischen stetigen Funktionen gegeben ist). Also existiert das Maximum $t_0 := \max I$ dieser kompakten Menge.



Angenommen, dieses Maximum t_0 wäre kleiner als b. Dann können wir die Funktion f um $\gamma(t_0)$ nach Satz 7.10 lokal in einer offenen Kreisscheibe U (wie im Bild oben) durch ihre Taylor-Reihe darstellen — und da am Punkt $\gamma(t_0)$ ja alle Ableitungen von f verschwinden, ist diese Taylor-Reihe identisch 0. Also ist auch f identisch gleich 0 in U. Da der Weg γ aber auch noch für $t > t_0$ ein Stück weit in U verlaufen muss, wäre natürlich auch dort noch $f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$ für alle $n \geq 0$ — im Widerspruch zu $t_0 = \max I$.

Also muss $t_0 = b$ sein, d. h. alle Ableitungen von f sind entlang des gesamten Weges gleich 0. Damit folgt insbesondere wie gewünscht $f(z) = f^{(0)}(\gamma(b)) = 0$. □

07

In der Regel verwendet man Lemma 8.8 in der folgenden Form:

Folgerung 8.9 (Identitätssatz). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge $A \subset D$ übereinstimmen, die einen Häufungspunkt in D besitzt, so gilt bereits $f = g$.*

Beweis. Dies ist genau die Aussage von Lemma 8.8 „(b) $\Rightarrow$ (a)", angewendet auf die Funktion $f - g$. □

Beispiel 8.10.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Da die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ einen Häufungspunkt (nämlich 0) im Definitionsbereich besitzt, folgt aus Lemma 8.8 „(b)$\Rightarrow$(a)“, dass f bereits die Nullfunktion sein muss. Es reichen hier also „sehr wenige“ Informationen über f aus, um die Funktion bereits eindeutig zu bestimmen!

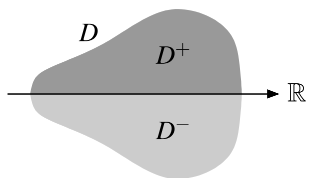
(b) Es sei nun $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Im Gegensatz zu (a) liegt in diesem Fall der Häufungspunkt nicht mehr im Definitionsgebiet von f, so dass Lemma 8.8 damit nicht mehr anwendbar ist. In der Tat gibt es auch Funktionen außer der Nullfunktion, die die genannte Eigenschaft erfüllen, nämlich z. B. die Funktion $f(z) = \sin\frac{\pi}{z}$.

Bemerkung 8.11.

(a) Da jeder Punkt einer offenen Menge Häufungspunkt dieser Menge ist, ergibt sich aus Folgerung 8.9 insbesondere, dass zwei auf einer zusammenhängenden offenen Menge D definierte holomorphe Funktionen, die auf einer (beliebig kleinen) nicht leeren offenen Teilmenge von D übereinstimmen, bereits auf ganz D übereinstimmen müssen. Der Identitätssatz wird häufig in dieser abgeschwächten Form verwendet.

(b) Erinnert euch noch einmal an das Maximumprinzip aus Satz 6.14, das besagte, dass eine holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$, die an einem Punkt $z_0 \in D$ betragsmäßig ein Maximum annimmt, in einer Umgebung von z_0 konstant sein muss. Ist D zusammenhängend, so können wir nun nach dem Identitätssatz aus Folgerung 8.9 sogar schließen, dass f dann auch auf ganz D konstant sein muss. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für das Minimumprinzip.

Aufgabe 8.12 (*Spiegelungsprinzip*)**.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Menge, die spiegelsymmetrisch zur reellen Achse ist (d. h. es gilt $z \in D \Leftrightarrow \overline{z} \in D$ für alle $z \in \mathbb{C}$). Wir setzen $D^+ := \{z \in D : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ und $D^- := \{z \in D : \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Weiterhin sei $f\colon D^+ \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die im Inneren von D^+ holomorph ist und auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt.



Zeige, dass f dann eindeutig zu einer auf ganz D holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann. (Hinweis: Betrachte die Funktion $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ auf D^-.)

Folgerung 8.13 („Die Nullstellen holomorpher Funktionen sind isoliert“)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sowie $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann gibt es zu jeder Nullstelle von f eine Umgebung, in der keine weitere Nullstelle von f liegt.*

Beweis. Wäre diese Aussage falsch, so gäbe es eine Nullstelle z_0 von f, so dass in jeder Umgebung von z_0 noch eine weitere Nullstelle von f liegt. Die Menge der Nullstellen von f hätte dann also den Häufungspunkt z_0. Nach dem Identitätssatz müsste f damit bereits die Nullfunktion sein, was wir aber ausgeschlossen haben. □

Aufgabe 8.14. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Man zeige: Sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $fg = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Satz beweisen, dass das Bild einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung immer offen ist.

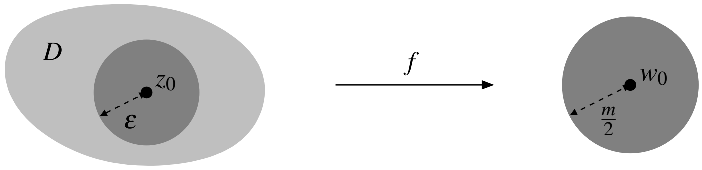
Satz 8.15. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sowie $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann ist $f(D) \subset \mathbb{C}$ offen.*

Beweis. Es sei $w_0 \in f(D)$, also $w_0 = f(z_0)$ für ein $z_0 \in D$. Wir müssen zeigen, dass es eine offene Kreisscheibe um w_0 gibt, die noch ganz in $f(D)$ liegt.

Nach Folgerung 8.13 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$ keine Nullstelle außer z_0 im abgeschlossenen Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\} \subset D$ besitzt. Dann ist

$$m := \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - w_0| > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass der Kreis um w_0 mit Radius $\frac{m}{2}$ noch in $f(D)$ liegt.



Es sei also $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - w_0| < \frac{m}{2}$ beliebig. Zu diesem Punkt w betrachten wir nun die Funktion $g \colon D \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - w$:

- Für $z \in D$ mit $|z - z_0| = \varepsilon$ ist
$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2};$$
- für $z = z_0$ ist $|g(z)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{m}{2}$.

Insbesondere ist die holomorphe Funktion g im Mittelpunkt z_0 des Kreises K also betragsmäßig kleiner als überall auf dem Rand ∂K. Nach dem Minimumprinzip aus Folgerung 6.17 ergibt sich damit, dass g in K eine Nullstelle haben muss, d. h. dass es ein $z \in K$ gibt mit $f(z) = w$. Also liegt w in $f(K) \subset f(D)$, was zu zeigen war. □

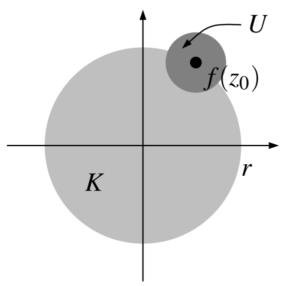
Bemerkung 8.16. Eine Funktion, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet, wird in der Regel **offene Funktion** genannt — man verwechsele dies nicht mit der bekannten Eigenschaft stetiger Funktionen, dass *Urbilder* offener Mengen wieder offen sind [G2, Satz 24.20]! In diesem Sinne besagt Satz 8.15 also, dass (nicht-konstante) holomorphe Funktionen stets offen sind.

Weiterhin ist klar, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung stets wieder zusammenhängend ist [G2, Satz 24.31 (a)]. Da wir offene zusammenhängende Mengen in Definition 5.8 (a) auch als Gebiet bezeichnet haben, kann man Satz 8.15 also auch so formulieren, dass (nicht-konstante) holomorphe Funktionen Gebiete auf Gebiete abbilden. Die Aussage dieses Satzes wird deswegen auch oft als **Gebietstreue** bezeichnet.

Beispiel 8.17. Satz 8.15 ist vor allem deswegen nützlich, weil er einige unserer bereits bekannten Resultate zusammenfasst und verallgemeinert:

(a) Aus Satz 8.15 ergibt sich sofort, dass holomorphe Funktionen, deren Bild komplett in einer „eindimensionalen Menge“ liegt (also z. B. auf der reellen oder imaginären Achse, auf einer Kreislinie, usw.) konstant sein müssen, da nicht-leere Teilmengen dieser „eindimensionalen Mengen“ niemals offen in $\mathbb{C}$ sein können. Auf diese Art erhalten wir also z. B. sehr einfache Lösungen für die Probleme aus Aufgabe 2.19 (b) und (c).

(b) Auch das Maximumprinzip folgt aus Satz 8.15: Angenommen, es wäre $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und $f \colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so dass $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in D$ ein lokales Maximum hätte. Nach evtl. Verkleinern von D können wir annehmen, dass $|f|$ sogar ein globales Maximum in z_0 hat. Ist $r := |f(z_0)|$, so läge das Bild $f(D)$ also vollständig im rechts hell eingezeichneten Kreis $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Nach Satz 8.15 ist $f(D)$ aber offen, muss also um den Punkt $f(z_0)$ noch eine Umgebung U dieses Punktes enthalten — was ein Widerspruch ist, da keine solche Umgebung noch vollständig im Kreis K liegt.



Aufgabe 8.18. Beweise die folgende komplexe Version der *Regel von de l'Hôpital* [G2, Satz 11.1]: sind $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, und $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$, so gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

sofern dieser Grenzwert existiert.