

9. Laurent-Reihen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickeln lassen, und daraus viele interessante Eigenschaften holomorpher Funktionen hergeleitet. Wir wollen diese Idee nun dahingehend verallgemeinern, dass wir in diesen Reihen auch negative Potenzen von $z-z_0$ zulassen. Die Untersuchung dieser neuen Reihen wird ganz analog zu der von Potenzreihen verlaufen, aber trotzdem am Ende wieder einige neue interessante Resultate abwerfen.

Definition 9.1 (Laurent-Reihen). Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine **Laurent-Reihe** um z_0 ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n}_{=: f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{=: f^+(z)}$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$. Dabei nennen wir f^- (die Summe der Terme mit negativen Exponenten von $z-z_0$) den **Hauptteil** und f^+ (die Summe der restlichen Terme) den **Nebenteil** von f .

Wie bei Potenzreihen wollen wir natürlich als Erstes untersuchen, für welche Werte z eine gegebene Laurent-Reihe konvergiert. Dabei ist von vornherein schon einmal klar, dass wir — falls mindestens ein Koeffizient a_n mit $n < 0$ ungleich Null ist — den Wert $z = z_0$ prinzipiell nicht einsetzen dürfen, da in diesem Fall schon der einzelne Term $a_n(z-z_0)^n$ nicht definiert wäre.

Bemerkung 9.2. Beachte, dass wir den „doppelten Grenzwert“ in den Laurent-Reihen, also die Summe von $-\infty$ bis ∞ , durch Aufspalten der Summe in zwei Teile f^+ und f^- in zwei einfache Grenzwerte verwandelt haben — eine Laurent-Reihe f konvergiert für ein z also *nach Definition* genau dann, wenn die Reihen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ konvergieren. Dies ist z. B. *nicht* das gleiche wie die evtl. auch naheliegende Festlegung

$$f(z) \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(z-z_0)^n, \quad (*)$$

wie das Beispiel der Laurent-Reihe

$$f(z) = \dots + z^{-3} - z^{-2} + z^{-1} - z + z^2 - z^3 \pm \dots,$$

also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ (-1)^n & \text{für } n > 0, \\ (-1)^{n+1} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

zeigt: Setzen wir hier z. B. $z = 1$ ein, so gilt $\sum_{n=-N}^N a_n z^n = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d. h. der Grenzwert (*) ist gleich Null. Die Laurent-Reihe ist für $z = 1$ jedoch *nicht* konvergent, da $f^+(1) = -1 + 1 - 1 \pm \dots$ (und analog auch $f^-(1)$) divergiert.

Bemerkung 9.3. Schreiben wir die Laurent-Reihe aus Definition 9.1 als

$$f(z) = f^-(z) + f^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

so sehen wir sofort, dass f^- und f^+ einfach Potenzreihen (in $\frac{1}{z-z_0}$ bzw. $z-z_0$) sind. Wir können unsere Resultate über Potenzreihen aus Kapitel 7 also ganz einfach auf den Fall von Laurent-Reihen übertragen. Sind z. B. $\frac{1}{r}$ und R die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen f^- bzw. f^+ , so ist nach den Bemerkungen 7.2 und 9.2 klar, dass die Laurent-Reihe konvergiert, wenn $\left| \frac{1}{z-z_0} \right| < \frac{1}{r}$ (also

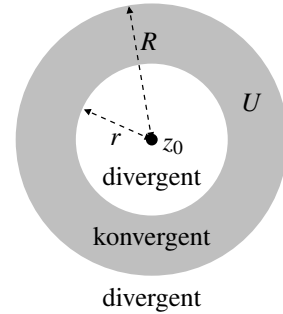
$|z - z_0| > r$) und $|z - z_0| < R$ gilt, und dass sie divergiert, falls $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$ ist. Damit ergibt sich sofort das folgende Resultat:

Folgerung 9.4. *Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Laurent-Reihe. Ferner seien $\frac{1}{r}$ und R wie oben die Konvergenzradien des Hauptteils f^- bzw. Nebenteils f^+ dieser Reihe — es ist nach Bemerkung 7.2 also*

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann gilt:

- (a) Die Reihe $f(z)$ ist (absolut) konvergent für alle z in dem Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Sie ist divergent für alle z mit $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$. Auf dem Rand, also falls $|z - z_0| = r$ oder $|z - z_0| = R$ ist, kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten.
- (b) Die Konvergenz ist gleichmäßig in z auf jedem kompakten Kreisring um z_0 , der ganz in U liegt (siehe Bemerkung 7.2).



Wir nennen U den **Konvergenzring** von f (beachte, dass U auch leer sein kann, falls nämlich $r \geq R$ ist).

Bemerkung 9.5.

- (a) Ein wichtiger Spezialfall von Folgerung 9.4 ist der, wenn $\frac{1}{r} = \infty$, der innere Radius r also gleich Null ist — was z.B. stets dann passiert, wenn der Hauptteil f^- nur aus endlich vielen Termen besteht und somit stets konvergiert. In diesem Fall ist der „Kreisring“ $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ einfach eine „punktierte Kreisscheibe“, also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt. Wir werden diesen Spezialfall in Kapitel 10 noch genauer untersuchen.
- (b) Da eine Laurent-Reihe einfach die Summe zweier Potenzreihen (in $z - z_0$ bzw. $\frac{1}{z - z_0}$) ist, ist aufgrund von Folgerung 7.6 klar, dass eine solche Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion darstellt und ihre Ableitungen wie erwartet gliedweise berechnet werden können.

Beispiel 9.6.

- (a) Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{f^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{f^+}.$$

Der Hauptteil f^- ist ein Polynom in $\frac{1}{z}$ und „konvergiert“ damit natürlich für alle $z \neq 0$. Der Nebenteil f^+ hat bekanntlich Konvergenzradius 1 und ist einfach gleich der geometrischen Reihe. Also ist der Konvergenzring von f der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, und die dort durch f dargestellte holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z(1 - z)}.$$

- (b) Für die nur aus dem Hauptteil bestehende Laurent-Reihe

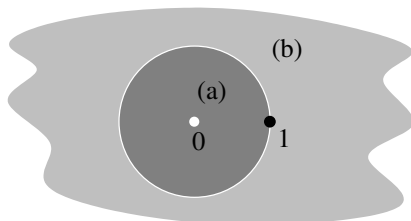
$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

ist der Konvergenzradius des Hauptteils wieder gleich 1, und der Konvergenzradius des (nicht existierenden) Nebenteils trivialerweise ∞ . Also ist der Konvergenzring von f gleich

$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$. Die auf diesem Gebiet durch f dargestellte Funktion lässt sich wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe einfacher hinschreiben:

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion wie in (a) — nur in einem anderen (disjunkten) Kreisring! Das folgende Bild verdeutlicht dies.



$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

$$\text{in (a): } f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

$$\text{in (b): } f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

Aufgabe 9.7.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2^n} (z-1)^n$?

(b) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Was ist dann der Konvergenzring der Laurent-Reihe $g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{|n|} z^n$? Welche Funktion wird durch g dargestellt?

08

Wir haben gerade schon festgestellt, dass jede Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion definiert. Die besondere Bedeutung der Laurent-Reihen liegt nun darin, dass — wie ihr vielleicht schon erwartet — genau wie bei Potenzreihen auch hier die Umkehrung gilt, also dass sich jede holomorphe Funktion auf jedem Kreisring, der noch im Definitionsgebiet liegt, dort in eine Laurent-Reihe entwickeln lässt. Dies besagt der folgende Satz, dessen Aussage und Beweis völlig analog zu Satz 7.10 sind:

Satz 9.8 (Laurent-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin seien $z_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig in D !) und $r < R$ reelle Zahlen, so dass der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ ganz in D liegt. Dann gilt:*

(a) Die Funktion f lässt sich auf U als Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

schreiben.

(b) Die Koeffizienten dieser Reihe sind eindeutig; sie sind bestimmt durch die Formel

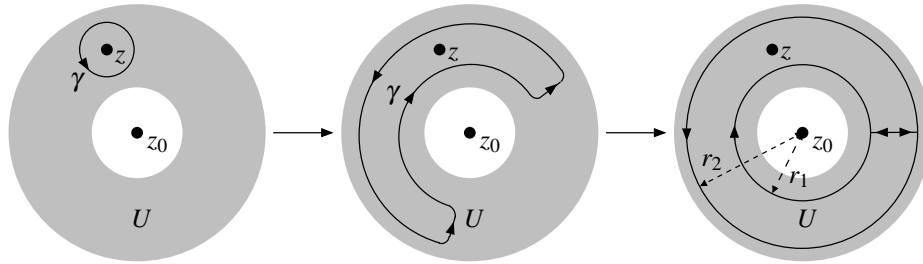
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für ein beliebiges ρ mit $r < \rho < R$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.10 gilt zunächst für alle $z \in U$ aufgrund der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für eine Kreislinie γ , die wie im folgenden Bild links in U liegt und einmal um den Punkt z herumläuft:



Nach der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.3 (a)) können wir diesen Weg nun durch einen anderen in $U \setminus \{z\}$ homotopen Weg ersetzen, denn der Integrand ist auf dieser Menge holomorph. Wie im Bild oben „ziehen wir ihn dazu im Kreisring U auseinander“, bis er aus zwei Kreislinien um z_0 (mit Radien r_1 und r_2 , wobei $r_1 < |z - z_0| < r_2$) besteht, die in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und durch ein Geradenstück miteinander verbunden sind (das in beiden Richtungen durchlaufen wird und sich damit weghebt). Es gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\underbrace{\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(A)} - \underbrace{\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(B)} \right).$$

Den Term (A) behandeln wir nun wörtlich genauso wie im Beweis von Satz 7.10: Wir schreiben

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw$$

und können den rechten Faktor im Integranden wegen $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$ in die geometrische Reihe entwickeln:

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \int_{|w-z_0|=r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n dw.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden können wir die Summe mit dem Integral vertauschen und erhalten so die Potenzreihe

$$(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n.$$

Den Term (B) können wir ganz analog behandeln: Hier schreiben wir allerdings

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dw$$

und entwickeln den rechten Faktor im Integranden wegen $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$ in die folgende geometrische Reihe:

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n dw = - \int_{|w-z_0|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot (w-z_0)^n dw.$$

Vertauschen wir auch hier wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden die Summe mit dem Integral, so erhalten wir die Laurent-Reihe

$$(B) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_1} f(w) (w-z_0)^n dw \right) (z-z_0)^{-n-1}.$$

Also lassen sich sowohl (A) als auch (B) — und damit auch f — in U als Laurent-Reihen schreiben. Dies zeigt Teil (a) des Satzes.

Für die Eindeutigkeit und die Formel aus (b) sei nun $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine solche Darstellung als Laurent-Reihe. Für alle ρ mit $r < \rho < R$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|w|=\rho} w^{k-n-1} dw && \text{(mit Substitution } w = z - z_0) \\ &= a_n && \text{(nach Beispiel 3.11 (b)). } \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 9.9.

- (a) Liegt in Satz 9.8 nicht nur der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, sondern sogar die ganze Kreisscheibe $U' = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ in D , so erhalten wir unsere Taylor-Entwicklung aus Satz 7.10 zurück: Dann ist nämlich zunächst für $n < 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0$$

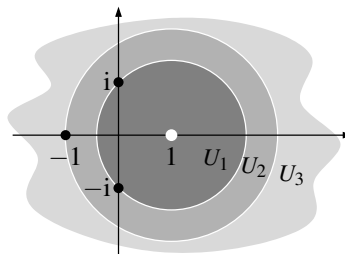
nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 4.1, da der Integrand dann holomorph in U' ist. Für $n \geq 0$ hingegen stimmt die in Satz 9.8 angegebene Formel für die Koeffizienten a_n mit der aus Satz 7.10 überein. Die Taylor-Entwicklung ist also ein Spezialfall der Laurent-Entwicklung.

- (b) Analog zu Beispiel 7.11 können wir auch im Fall von Laurent-Reihen holomorpher Funktionen oft die Konvergenzgebiete angeben, ohne die Reihen explizit zu kennen. Wollen wir z. B. die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z^4}$$

(die genau in den vierten Einheitswurzeln nicht definiert ist) als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt 1 schreiben, so gibt es wie im Bild rechts genau drei maximale Kreisringe mit Mittelpunkt 1, auf denen f holomorph ist, nämlich

$$\begin{aligned} U_1 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}, \\ U_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 2\}, \\ U_3 &= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1|\}. \end{aligned}$$



Also besitzt f nach Satz 9.8 genau drei Laurent-Entwicklungen mit Entwicklungspunkt 1, nämlich je eine in U_1 , U_2 und U_3 .

- (c) In manchen Fällen kann man die Laurent-Entwicklung einer holomorphen Funktion auch aus bekannten Reihenentwicklungen gewinnen. So ergibt sich z. B. die Laurent-Reihe der Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ auf dem Kreisring $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach aus der Definition der Exponentialfunktion als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Aufgabe 9.10. Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$? Berechne diese Reihen explizit und gib ihre Konvergenzringe an.