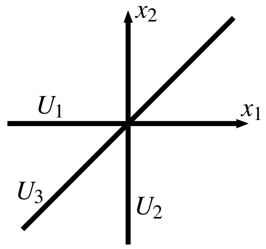
15. Quotientenräume und Dimensionsformeln

Im letzten Kapitel haben wir den zentralen Begriff der Dimension eines Vektorraums eingeführt. Für einen irgendwie konstruierten Vektorraum, z. B. als Durchschnitt oder Summe zweier Unterräume, oder als Bild oder Kern einer gegebenen linearen Abbildung, haben wir bisher jedoch kaum effiziente Möglichkeiten, seine Dimension (oder gar eine Basis) explizit zu bestimmen. Wir wollen nun einige weitere nützliche Konstruktionen und Resultate der Vektorraumtheorie behandeln, mit denen sich unter anderem Dimensionen in vielen Fällen einfach ablesen lassen. Ab dem nächsten Kapitel werden wir dann auch algorithmische Verfahren untersuchen, die selbst in komplizierten Fällen die explizite Berechnung nahezu aller unserer Konstruktionen ermöglichen.

15.A Komplemente und Quotientenräume

Als Erstes wollen wir uns wie in Definition 13.10 und Bemerkung 13.11 noch einmal die Konstruktion der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines Vektorraums V anschauen.

Bemerkung 15.1 (Eindeutigkeit der Summendarstellung)**.** Jeder Vektor in einer Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen eines Vektorraums V lässt sich nach Definition als $x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ schreiben. Allerdings ist diese Darstellung im Allgemeinen nicht eindeutig: Betrachten wir wie im Bild rechts die drei Ursprungsgeraden



$$U_1 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad U_2 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad U_3 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

in $\mathbb{R}^2$, so hat z. B. der Vektor

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_3} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in U_3} \quad \in U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$$

zwei verschiedene Darstellungen dieser Art. Ist die Darstellung jedoch immer eindeutig, so geben wir dieser Situation einen besonderen Namen:

Definition 15.2 (Direkte Summe von Unterräumen)**.** Es seien $U_1, \dots, U_n$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V und $U = U_1 + \cdots + U_n$. Hat jedes $x \in U$ eine *eindeutige* Darstellung der Form $x = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so nennt man die Summe **direkt**. Möchte man dies auch in der Notation andeuten, so schreibt man dafür $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Lemma 15.3 (Dimension direkter Summen)**.** *Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines K-Vektorraums V ist genau dann direkt, wenn die Abbildung*

$$U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 + \cdots + U_n, \ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$$

ein Isomorphismus ist. Ist V endlich-dimensional, so gilt in diesem Fall insbesondere

$$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n.$$

Beweis. Es ist klar, dass die gegebene Abbildung in jedem Fall linear ist; außerdem ist sie nach Definition der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ stets surjektiv. Injektiv ist sie genau dann, wenn für alle $x_i, y_i \in U_i$ aus $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$ bereits $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, also $x_i = y_i$ für alle i folgt. Dies bedeutet nach Definition 15.2 aber genau, dass die Summe direkt ist.

Ist V darüber hinaus endlich-dimensional, so gilt dies nach Lemma 14.25 auch für die Unterräume $U_1,\dots,U_n$. Da endlich erzeugte isomorphe Vektorräume nach Satz 14.21 (c) die gleiche Dimension haben, ergibt sich aus Folgerung 14.23 also

$$\dim(U_1\oplus\cdots\oplus U_n) = \dim(U_1\times\cdots\times U_n) = \dim U_1+\cdots+\dim U_n. \qquad \square$$

Im Fall von nur zwei Unterräumen kann man besonders einfach feststellen, ob ihre Summe direkt ist.

Lemma 15.4. *Für Unterräume U_1, U_2 und U eines K-Vektorraums V sind äquivalent:*

(a) $U = U_1\oplus U_2$;

(b) $U = U_1+U_2$ *und* $U_1\cap U_2 = \{0\}$.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $U = U_1\oplus U_2$. Nach Definition ist dann natürlich $U = U_1+U_2$. Ist weiterhin $x\in U_1\cap U_2$, so können wir x sowohl mit $x_1 = x$ und $x_2 = 0$ als auch mit $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ in der Form $x = x_1+x_2$ mit $x_1\in U_1$ und $x_2\in U_2$ schreiben. Da diese Darstellung aber nach Voraussetzung eindeutig ist, folgt $x = 0$. Weil $x\in U_1\cap U_2$ beliebig war, bedeutet dies gerade $U_1\cap U_2 = \{0\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es gelte nun $U = U_1+U_2$ und $U_1\cap U_2 = \{0\}$. Weiterhin sei $x\in U_1+U_2$ mit zwei Darstellungen $x = x_1+x_2 = y_1+y_2$ für gewisse $x_1,y_1\in U_1$ und $x_2,y_2\in U_2$. Dann gilt

$$x_1-y_1 = y_2-x_2 \quad \in U_1\cap U_2.$$

Nach Voraussetzung bedeutet dies aber gerade $x_1-y_1 = y_2-x_2 = 0$, d. h. $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Die Darstellung ist also eindeutig, und damit gilt $U = U_1\oplus U_2$. $\square$

Beispiel 15.5.

(a) Die Summe U_1+U_2 der x_1-Achse und der x_2-Achse in $\mathbb{R}^3$ in Beispiel 13.12 ist direkt, denn dort ist natürlich $U_1\cap U_2 = \{0\}$. In der Tat sieht man in diesem Beispiel auch sofort, dass sich jeder Vektor in der x_1-x_2-Ebene U_1+U_2 eindeutig als Summe von einem Vektors in U_1 und einem in U_2 schreiben lässt.

(b) Die Summe $U_1+U_2+U_3$ in Bemerkung 15.1 ist hingegen nicht direkt, wie wir dort bereits gesehen hatten. Allerdings ist in diesem Fall trotzdem $U_1\cap U_2\cap U_3 = \{0\}$ — was zeigt, dass sich die Aussage von Lemma 15.4 nicht genauso auf mehr als zwei Summanden übertragen lässt. Die zu Lemma 15.4 analoge Aussage für allgemeine Summen ist stattdessen die folgende:

Aufgabe 15.6. Zeige, dass die folgenden Aussagen für Unterräume $U_1,\dots,U_n$ eines K-Vektorraums V äquivalent sind:

(a) $U = U_1\oplus\cdots\oplus U_n$;

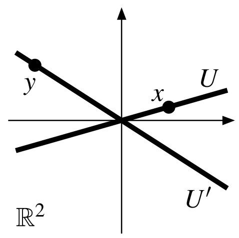
(b) $U = U_1+\cdots+U_n$ und $U_i\cap(U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1,\dots,n$.

Einen besonderen Namen hat die Situation, wenn die Summe zweier Unterräume direkt und gleich dem gesamten Vektorraum ist.

Definition 15.7 (Komplemente)**.** Es sei U ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Ein Unterraum $U'\le V$ heißt **Komplement** von U in V, wenn $U\oplus U' = V$ (nach Lemma 15.4 also $U+U' = V$ und $U\cap U' = \{0\}$) gilt.

Bemerkung 15.8 (Dimension von Komplementen)**.** Nach Lemma 15.3 gilt für jedes Komplement U' eines Untervektorraums U in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V die Dimensionsformel $\dim U+\dim U' = \dim V$, also $\dim U' = \dim V-\dim U$.

Beispiel 15.9 (Nichteindeutigkeit von Komplementen)**.** Wie im Bild unten rechts seien $U = \text{Lin}(x)$ und $U' = \text{Lin}(y)$ zwei verschiedene Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$. Da x und y dann keine Vielfachen voneinander sind, sind diese beiden Vektoren also linear unabhängig; mit Satz 14.20 bilden sie daher eine Basis des zweidimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^2$.



Nach Bemerkung 14.5 ist damit $U + U' = \text{Lin}(x,y) = \mathbb{R}^2$, außerdem gilt offensichtlich $U \cap U' = \{0\}$. Also ist U' ein Komplement von U.

Da es zu einer gegebenen Ursprungsgeraden U in $\mathbb{R}^2$ natürlich unendlich viele Geraden $U' \neq U$ gibt, folgt daraus insbesondere, dass Komplemente von Unterräumen in der Regel nicht eindeutig sind. Wir wollen nun aber sehen, dass Komplemente zumindest im endlich-dimensionalen Fall stets existieren:

Satz 15.10 (Existenz von Komplementen)**.** *Jeder Unterraum U eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V besitzt ein Komplement.*

Beweis. Nach Lemma 14.25 ist U endlich erzeugt, hat also nach Satz 14.11 eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$. Wir ergänzen sie gemäß Folgerung 14.16 zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ von V und behaupten, dass $U' := \text{Lin}(y_1,\dots,y_m)$ dann ein Komplement von U ist.

- Es ist offensichtlich $U + U' = V$, denn nach Bemerkung 14.5 ist
$$U + U' = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n) + \text{Lin}(y_1,\dots,y_m) = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = V.$$
- Es ist $U \cap U' = \{0\}$: Für $x \in U \cap U'$, also $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_m y_m$ für gewisse $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_m \in K$, erhalten wir durch Subtraktion
$$0 = x - x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n - \mu_1 y_1 - \cdots - \mu_m y_m.$$
Da die Familie $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ linear unabhängig ist, ist dies aber nur möglich für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, also für $x = 0$.

Also ist U' ein Komplement von U in V. □

Bemerkung 15.11 (Berechnung von Komplementen)**.** Beachte, dass der Beweis von Satz 15.10 konstruktiv ist, d. h. auch die konkrete Berechnung eines Komplements ermöglicht: Möchte man ein Komplement U' zu einem Unterraum U eines endlich-dimensionalen Vektorraums V berechnen, muss man (z. B. mit Hilfe des Verfahrens aus Satz 14.15) eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen; die dafür hinzu genommenen Vektoren bilden dann eine Basis eines Komplements U'.

Ist z. B. $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $U = \text{Lin}(y)$, so haben wir in Beispiel 14.14 gesehen, dass man y z. B. für e_1 in die Standardbasis (e_1,e_2,e_3) hineintauschen kann, dass also (y,e_2,e_3) ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Damit ist $U' = \text{Lin}(e_2,e_3)$ ein Komplement von U.

Komplemente von Unterräumen sind in der Praxis sehr nützlich und haben auch eine einfache anschauliche Deutung: Ist U' ein Komplement eines Unterraums U in einem Vektorraum V, so lässt sich ja jeder Vektor aus V nach Definition 15.7 eindeutig als Summe aus einem Vektor in U und einem „Restvektor" in U' schreiben. Wir können uns U' also in gewissem Sinne als einen Unterraum vorstellen, der diese „Restteile" von Vektoren in V misst, wenn man ihren Anteil in U heraus nimmt. Unschön ist an dieser Konstruktion allerdings, dass ein Komplement nach Beispiel 15.9 nicht eindeutig bestimmt und damit ein recht unnatürliches Objekt ist. Was im obigen Sinne der Restteil eines Vektors in V nach Herausnehmen des Anteils in U ist, lässt sich also nicht beantworten, solange man nicht eine (letztlich willkürliche) Wahl eines Komplements von U in V getroffen hat.

Wir wollen nun eine deutlich schönere Konstruktion einführen, die solche Restteile auch ohne willkürliche Wahlen messen kann. Der Preis dafür ist, dass der Vektorraum, der diese Restteile auf ganz natürliche Art beschreibt, kein *Unterraum* von V mehr ist, sondern ein sogenannter *Quotientenraum*: ein Raum von Äquivalenzklassen von Vektoren in V wie in Abschnitt 2.B, wobei wir zwei Vektoren in V miteinander identifizieren wollen, wenn sie sich um ein Element von U voneinander unterscheiden. Diejenigen von euch, die auch die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ besuchen, kennen diese Idee vielleicht bereits von den Faktorgruppen [G, Kapitel 6].

Lemma und Definition 15.12. *Es seien V ein K-Vektorraum und $U \le V$ ein fest gewählter Unterraum. Dann ist durch*

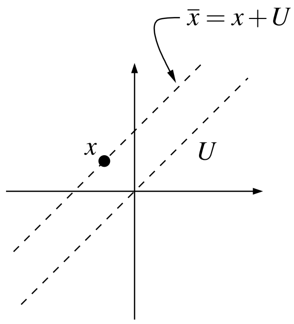
$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in U \qquad \text{für alle } x,y \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Für die Äquivalenzklasse eines Vektors $x \in V$ bezüglich dieser Relation gilt

$$\overline{x} = x + U := \{x + u : u \in U\}.$$

*Man nennt diese Menge (wie im Bild rechts) einen **affinen** bzw. **verschobenen Unterraum** mit Aufpunkt x.*

Die Menge $V/\sim$ aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation bezeichnet man mit V/U.



Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die gegebene Relation eine Äquivalenzrelation wie in Definition 2.27 ist.

Reflexivität: Für alle $x \in V$ gilt $x - x = 0 \in U$ nach Bemerkung 13.6 (b), und damit $x \sim x$.

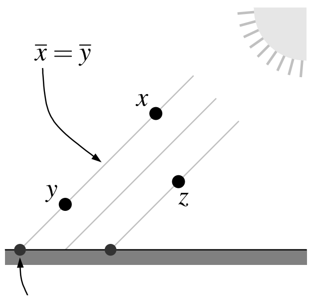
Symmetrie: Es seien $x,y \in V$ mit $x \sim y$, also $x - y \in U$. Dann ist nach Definition 13.5 (c) auch $(-1)(x-y) = y - x \in U$ und damit $y \sim x$.

Transitivität: Sind $x,y,z \in V$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x - y \in U$ und $y - z \in U$, so ist nach Definition 13.5 (b) auch $(x-y)+(y-z) = x - z \in U$ und damit $x \sim z$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für die Klasse $\overline{x}$ eines Vektors x gilt nun nach Definition 2.27 (c)

$$\overline{x} = \{y \in V : y - x \in U\} = \{y \in V : y - x = u \text{ für ein } u \in U\} = \{x + u : u \in U\}. \qquad \square$$

Bemerkung 15.13 (Anschauliche Deutung von V/U)**.** Die geometrische Bedeutung des Raumes V/U lässt sich am besten wie im Bild rechts erläutern, in dem $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist. Dort scheint die Sonne mit parallelen (hell eingezeichneten) Strahlen in Richtung von U und wirft dabei von jedem Punkt in V einen Schatten auf dem Boden. In diesem Bild ist die Klasse $\overline{x} \in V/U$ eines Punktes $x \in V$ gerade der Sonnenstrahl durch x. Zwei Punkte in V bestimmen also genau dann den gleichen Punkt in V/U, wenn sie auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen, d. h. denselben Schattenpunkt auf dem Boden werfen. Im Bild rechts ist also $\overline{x} = \overline{y} \neq \overline{z}$.



Schattenpunkt von x und y

In diesem Sinne kann man sich V/U damit als eine „Schattenwelt“ von V vorstellen, die zwar jeden Punkt von V sieht, aber nur mit einem Teil seiner Informationen: Der „Abstand zur Sonne“ eines Punktes in V ist anhand des Schattenbildes nicht mehr zu rekonstruieren. Für einen Vektor $x \in V$ nimmt die Klasse $\overline{x}$ also wie beabsichtigt „den Anteil in U heraus“.

Bemerkung 15.14. Für zwei Vektoren $x,y \in V$ gilt nach Satz 2.29 (a) genau dann $\overline{x} = \overline{y}$ in V/U, wenn $x \sim y$ ist. Wir sehen mit Definition 15.12 also für alle $x,y \in V$ in V/U:

$$\boxed{\begin{array}{lccl} & \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow & x - y \in U, \\ \text{insbesondere also} & \overline{x} = \overline{0} & \Leftrightarrow & x \in U. \end{array}}$$

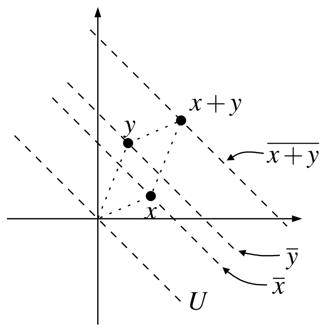
Mit diesen Rechenregeln kann man Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen in V/U immer auf Aussagen über die Repräsentanten in V zurückführen. So ist in der Situation von Bemerkung 15.13 beispielsweise

$$\overline{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}}, \quad \text{weil} \quad \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix} \in U.$$

Um mit den Äquivalenzklassen in V/U rechnen zu können, fehlt uns aber noch ein letzter Schritt: Bisher ist der Raum V/U nur eine Menge ohne weitere Struktur. Um ihn im Rahmen der linearen Algebra untersuchen zu können, müssen wir ihn selbst wieder zu einem Vektorraum machen, also auf ihm eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definieren und zeigen, dass damit dann die Vektorraumeigenschaften für V/U gelten.

Die Idee hierfür ist sehr einfach und im Bild rechts dargestellt: Wollen wir die verschobenen Unterräume $\overline{x}$ und $\overline{y}$ in V/U addieren, so addieren wir hierfür einfach die Aufpunkte x und y und verwenden den so erhaltenen Punkt $x+y$ als Aufpunkt für die Summe, d. h. wir setzen

$$\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y}.$$



Wie in Bemerkung 2.31 müssen wir nun die Wohldefiniertheit dieser Verknüpfung verschobener Unterräume (also die Unabhängigkeit von der Wahl der Aufpunkte) zeigen, eine entsprechende Skalarmultiplikation definieren, und dafür dann schließlich die Vektorraumaxiome nachweisen.

Satz und Definition 15.15 (Quotientenräume)**.** *Es sei U ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Dann sind die Verknüpfungen*

$$\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y} \qquad \text{und} \qquad \lambda\cdot\overline{x} := \overline{\lambda x} \qquad \text{für } x,y\in V \text{ und } \lambda\in K$$

*auf V/U wohldefiniert und machen V/U zu einem K-Vektorraum. Man nennt ihn den **Quotientenraum** bzw. **Faktorraum** von V nach U.*

*Man spricht V/U auch als „V **modulo** U“ und nennt $\overline{x}\in V/U$ für ein $x\in V$ die **Restklasse** von V modulo U.* 34

Beweis. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Addition: Sind $x,x',y,y'\in V$ mit $\overline{x}=\overline{x'}$ und $\overline{y}=\overline{y'}$, so bedeutet dies nach Bemerkung 15.14 genau $x-x'\in U$ und $y-y'\in U$. Nach Definition 13.5 (b) ist dann aber auch $(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in U$ — was wiederum nach Bemerkung 15.14 genau $\overline{x+y}=\overline{x'+y'}$ bedeutet. Also ist die Addition auf V/U wohldefiniert.

Genauso zeigt man die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation: Sind $\lambda\in K$ und $x,x'\in V$ mit $\overline{x}=\overline{x'}$, also $x-x'\in U$, so ist nach Definition 13.5 (c) auch $\lambda x-\lambda x'=\lambda(x-x')\in U$ und damit $\overline{\lambda x}=\overline{\lambda x'}$.

Die Vektorraumaxiome für V/U ergeben sich nun unmittelbar aus denen von V. So erhält man z. B. die Assoziativität der Vektoraddition durch die einfache Rechnung

$$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z} = \overline{x+y}+\overline{z} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+(y+z)} = \overline{x}+\overline{y+z} = \overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)$$

für alle $x,y,z\in V$, wobei die mittlere Gleichheit die Assoziativität in V ist und sich die anderen Gleichungen aus der Definition der Addition in V/U ergeben. Die übrigen Eigenschaften überprüft man genauso; der Nullvektor in V/U ist die Klasse $\overline{0}$ des Nullvektors in V bzw. der unverschobene Unterraum U, das additive Inverse eines Elements $\overline{x}\in V/U$ ist $\overline{-x}$. □

Aufgrund der anschaulichen Deutung von Komplementen und Quotientenräumen sollte es nicht verwundern, dass wir nun zeigen können, dass diese beiden Konzepte letztlich das gleiche beschreiben, also als Vektorräume isomorph zueinander sind. Wie oben schon erwähnt ist der Vorteil des Komplements lediglich, dass es als Unterraum des ursprünglichen Vektorraums anschaulich leichter zu verstehen ist; der Vorteil des Quotientenraums ist dagegen, dass er ohne willkürliche Wahlen konstruiert werden kann und damit aus mathematischer Sicht das natürlichere Objekt ist.

Satz 15.16 (Dimension von Quotientenräumen)**.** *Es seien U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V und U' ein Komplement von U. Dann ist die Abbildung*

$$f\colon U' \to V/U,\ x \mapsto \overline{x}$$

ein Isomorphismus.

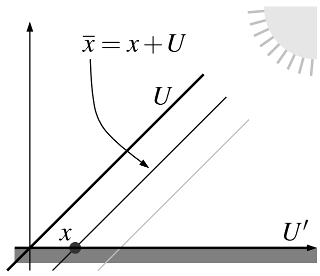
Ist V zusätzlich endlich-dimensional, so gilt also insbesondere $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Beweis. Um zu zeigen, dass f ein Isomorphismus ist, müssen wir die folgenden Dinge überprüfen:

- f ist eine lineare Abbildung, denn für alle $x,y \in U'$ ist
$$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y),$$
und eine analoge Aussage gilt natürlich für die Skalarmultiplikation.
- f ist injektiv: Es sei $x \in U'$ mit $f(x) = \overline{x} = \overline{0}$, also $x \in U$ nach Bemerkung 15.14. Dann ist aber $x \in U \cap U' = \{0\}$. Damit ist f nach Lemma 13.24 injektiv.
- f ist surjektiv: Es sei $\overline{x} \in V/U$ beliebig, also $x \in V$. Wegen $V = U + U'$ können wir $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U'$ schreiben. Dann liegt x_2 in der Definitionsmenge U' von f, und es gilt $f(x_2) = \overline{x_2} = \overline{x}$ nach Bemerkung 15.14, da $x - x_2 = x_1 \in U$. Also ist f surjektiv.

Die Zusatzaussage folgt nun sofort daraus, dass das Komplement U' nach Bemerkung 15.8 die Dimension $\dim V - \dim U$ hat. □

Bemerkung 15.17. Das Bild rechts illustriert in der Situation von Bemerkung 15.13 noch einmal, dass der Morphismus f aus Satz 15.16 bijektiv ist: Die Bodenlinie U' ist nach Beispiel 15.9 ein Komplement der Richtung U der Sonnenstrahlen. Die Abbildung f ordnet nun jedem Punkt $x \in U'$ auf dem Boden den Sonnenstrahl $\overline{x} \in V/U$ durch diesen Punkt zu, und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Bodenpunkten und der Menge der Sonnenstrahlen. Wenn wir in Bemerkung 15.13 gesagt haben, dass V/U die „Schattenwelt" auf dem Boden ist, haben wir dabei also schon den Isomorphismus zwischen dem eigentlichen Quotientenraum V/U und dem Boden U' verwendet.



Bemerkung 15.18 (Basen von Quotientenräumen)**.** Nach Satz 15.16 (und Satz 14.21 (c)) erhalten wir eine Basis des Quotientenraums V/U, indem wir eine Basis eines Komplements von U wählen und die Restklassen dieser Vektoren in V/U nehmen. Kombinieren wir dies mit dem Verfahren aus Bemerkung 15.11, so bedeutet dies: Wir können eine Basis von V/U konstruieren, indem wir eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen und dann die Restklassen der hinzu genommenen Vektoren wählen. Im Beispiel von Bemerkung 15.11 ist also z. B. $(\overline{e_2}, \overline{e_3})$ eine Basis von V/U.

Aufgabe 15.19. Es sei $U = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \le \mathbb{R}^3$. Man zeige:

(a) Die Familie $B = \left(\overline{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\right)$ in $\mathbb{R}^3/U$ ist weder linear unabhängig noch ein Erzeugendensystem.

(b) $f\colon \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}^3,\ \overline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}2x_1 - x_2 - 3x_3\\0\\2x_3\end{pmatrix}$ ist eine wohldefinierte lineare Abbildung.

Aufgabe 15.20 (Invariante Unterräume)**.** Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Ein Unterraum $U \subset V$ heißt *f-invariant*, wenn $f(U) \subset U$.

Zeige, dass U genau dann f-invariant ist, wenn $g\colon V/U \to V/U$, $\overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$ eine lineare Abbildung definiert.

Aufgabe 15.21. Es sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten K-Vektorraums V.

Man zeige: Ist $(x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von U und sind $y_1,\dots,y_m \in V$ so dass $(\overline{y_1},\dots,\overline{y_m})$ eine Basis von V/U ist, so ist $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ eine Basis von V.

15.B Isomorphiesätze und Dimensionsformeln

Als Anwendung der Quotientenräume werden wir nun einige nützliche Isomorphismen zwischen unseren bisherigen Konstruktionen herleiten, aus denen dann weitere wichtige Dimensionsformeln folgen. Als Erstes wollen wir dazu den sogenannten Homomorphiesatz beweisen, der aus jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ „einen Isomorphismus machen kann". Die Idee hierfür ist sehr einfach: Natürlich kann man f zunächst einmal surjektiv machen, indem man den Zielraum W durch den Unterraum $\operatorname{Im} f$ ersetzt. Um f auch noch injektiv zu machen, also gemäß Lemma 13.24 den Kern zu $\{0\}$ zu machen, können wir einfach den Startraum V durch den Quotientenraum $V/\operatorname{Ker} f$ ersetzen: Auf diese Art werden alle Elemente des Kerns von f miteinander identifiziert, so dass der Kern der neuen Abbildung auf dem Quotientenraum nur noch aus dem einen Element $\overline{0} = \operatorname{Ker} f$ besteht.

Satz 15.22 (**Homomorphiesatz**)**.** *Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist die Abbildung*

$$g\colon V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$$

(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.

Beweis. Wir müssen einige Dinge überprüfen:

- Die Abbildung g ist wohldefiniert: Sind $x,y \in V$ mit $\overline{x} = \overline{y}$, also $x-y \in \operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 15.14, so ist $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$ und damit $f(x) = f(y)$.
- Die Abbildung g ist linear: Für $x,y \in V$ gilt
$$g(\overline{x}+\overline{y}) = g(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x)+f(y) = g(\overline{x}) + g(\overline{y});$$
analog folgt auch die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.
- Die Abbildung g ist surjektiv: Dies ist klar nach Definition von $\operatorname{Im} f$, denn jedes Element in $\operatorname{Im} f$ ist ja von der Form $f(x) = g(\overline{x})$ für ein $x \in V$.
- Die Abbildung g ist injektiv: Nach Lemma 13.24 genügt es dafür zu zeigen, dass $\operatorname{Ker} g = \{\overline{0}\}$. Es sei also $x \in V$ mit $g(\overline{x}) = 0$. Dann ist $f(x) = 0$, also $x \in \operatorname{Ker} f$ und damit $\overline{x} = \overline{0} \in V/\operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 15.14. □

Beispiel 15.23 (Anschauliche Deutung des Homomorphiesatzes)**.** Als anschauliches Beispiel für den Homomorphiesatz können wir noch einmal die „Schattenwelt" aus Bemerkung 15.13 und Bemerkung 15.17 betrachten. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die einen Punkt auf seinen Schattenpunkt auf den Boden abbildet, so ist $\operatorname{Ker} f = U$ der Sonnenstrahl durch 0 und $\operatorname{Im} f = U'$ der Boden. Satz 15.22 gibt uns dann den Isomorphismus $g\colon \mathbb{R}^2/U \to U'$, der jeden Sonnenstrahl auf seinen Bodenpunkt abbildet und genau die Umkehrung des Isomorphismus aus Satz 15.16 ist.

Aufgabe 15.24. Die lineare Abbildung, die der Situation in Beispiel 15.23 entspricht, ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfe den Homomorphiesatz in diesem Fall explizit, d. h. zeige durch eine direkte Rechnung, dass die Abbildung

$$g\colon \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wohldefiniert, linear, surjektiv und injektiv ist.

Folgerung 15.25 (Dimensionsformel für Morphismen)**.** *Für jeden Morphismus $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen gilt* $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$.

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz 15.22 ist $V/\operatorname{Ker} f$ isomorph zu $\operatorname{Im} f$. Also gilt

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim(V/\operatorname{Ker} f) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

nach Satz 15.16. □

Folgerung 15.26. *Es seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Morphismus. Dann gilt*

$$f \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist bijektiv}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} && \text{(nach Lemma 13.24)} \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \\ &\Leftrightarrow \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 0 && \text{(nach Folgerung 15.25)} \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V && \text{(nach Lemma 14.25)} \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

□

Beispiel 15.27. Folgerung 15.26 ist für unendlich-dimensionale Vektorräume falsch: Betrachten wir z. B. auf dem Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen die Morphismen

$$f\colon V \to V,\ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$
$$\text{und} \qquad g\colon V \to V,\ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

aus Beispiel 13.17 (d), so ist f injektiv aber nicht surjektiv, und g surjektiv aber nicht injektiv.

Nach Kernen und Bildern linearer Abbildungen betrachten wir als Nächstes Summen und Durchschnitte von Unterräumen. Auch dafür gibt es zunächst wieder eine nützliche Isomorphieaussage.

Satz 15.28 (**Isomorphiesatz** für Summen und Durchschnitte)**.** *Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines K-Vektorraums V. Dann ist die Abbildung*

$$g\colon U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1 + U_2)/U_2,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}$$

(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$f\colon U_1 \to (U_1 + U_2)/U_2,\ x \mapsto \overline{x}.$$

Sie ist offensichtlich linear (und Wohldefiniertheit muss hier nicht überprüft werden, da der Startraum kein Quotientenraum ist). Wir bestimmen das Bild und den Kern von f:

- $\operatorname{Im} f = (U_1 + U_2)/U_2$, d. h. f ist surjektiv: Für ein beliebiges Element $\overline{x_1 + x_2} \in (U_1 + U_2)/U_2$ (mit $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$) ist $x_1 \in U_1$ ein Urbild unter f, denn $f(x_1) = \overline{x_1} = \overline{x_1 + x_2}$.
- $\operatorname{Ker} f = U_1 \cap U_2$: Ein Element $x \in U_1$ liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(x) = \overline{x} = \overline{0}$ ist, was nach Bemerkung 15.14 äquivalent ist zu $x \in U_2$. Der Kern von f besteht also aus allen Elementen von U_1, die auch in U_2 liegen, und ist damit gleich $U_1 \cap U_2$.

Der Homomorphiesatz 15.22 für f liefert nun den Isomorphismus $g\colon U_1/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$, $\overline{x} \mapsto f(x)$, also wie behauptet

$$g\colon U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1 + U_2)/U_2,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}.$$

□

Bemerkung 15.29. In der Literatur sind für die Sätze 15.22 und 15.28 z. T. recht unterschiedliche Bezeichnungen üblich. Manche Bücher bezeichnen sie als den 1. und 2. Isomorphiesatz, während andere aber auch Satz 15.28 den 1. Isomorphiesatz nennen.

Folgerung 15.30 (Dimensionsformel für Summen und Durchschnitte)**.** *Sind U_1 und U_2 endlich erzeugte Unterräume eines K-Vektorraums V, so gilt*

$$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)=\dim U_1+\dim U_2.$$

Beweis. Nach dem Isomorphiesatz 15.28 haben $U_1/(U_1\cap U_2)$ und $(U_1+U_2)/U_2$ dieselbe Dimension. Aus der Dimensionsformel für Quotienten in Satz 15.16 ergibt sich also

$$\dim U_1-\dim(U_1\cap U_2)=\dim(U_1+U_2)-\dim U_2$$

und somit die Behauptung. □

Beispiel 15.31. Beachte, dass nur die Summe der Dimensionen von $U_1\cap U_2$ und U_1+U_2 durch $\dim U_1$ und $\dim U_2$ bestimmt sind, nicht aber die Dimensionen von $U_1\cap U_2$ und U_1+U_2 selbst. Als einfaches Beispiel hierfür seien U_1 und U_2 zwei Geraden (durch den Ursprung) in $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Ist $U_1=U_2$, so ist $U_1+U_2=U_1\cap U_2=U_1=U_2$, und die Dimensionsformel ergibt
$$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)=1+1=1+1=\dim U_1+\dim U_2.$$

(b) Ist hingegen $U_1\neq U_2$, so ist $U_1+U_2=\mathbb{R}^2$ und $U_1\cap U_2=\{0\}$, und damit
$$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)=2+0=1+1=\dim U_1+\dim U_2.$$

Aufgabe 15.32. Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1,U_2\leq V$ mit $\dim V=6$, $\dim U_1=5$ und $\dim U_2=3$.

Welche Dimension kann $U_1\cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

Aufgabe 15.33. Wir betrachten die Unterräume

$$U_1=\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\quad\text{und}\quad U_2=\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

von $\mathbb{R}^4$. Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis von U_1+U_2, von $U_1\cap U_2$, von einem Komplement von U_1 und vom Quotientenraum V/U_1.

Aufgabe 15.34. Es seien $U_1,\dots,U_n$ Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Zeige in Ergänzung zu Lemma 15.3, dass die Summe $U_1+\cdots+U_n$ *genau dann* direkt ist, wenn

$$\dim(U_1+\cdots+U_n)=\dim U_1+\cdots+\dim U_n,$$

und dass man in diesem Fall eine Basis von $U_1+\cdots+U_n$ erhält, indem man Basen von $U_1,\dots,U_n$ vereinigt.

Aufgabe 15.35 (Alternative Beweise für Dimensionsformeln)**.** Gib einen alternativen Beweis der Dimensionsformel für Morphismen (siehe Folgerung 15.25) sowie für Summen und Durchschnitte (siehe Folgerung 15.30) an, der keine Quotientenräume benötigt, indem du die folgenden Aussagen zeigst und benutzt:

(a) Es sei $f\colon V\to W$ ein Morphismus endlich-dimensionaler Vektorräume. Wir wählen eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $\operatorname{Ker} f$ und ergänzen sie zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ von V. Dann ist $(f(y_1),\dots,f(y_m))$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$.

(b) Es seien U_1 und U_2 zwei endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraums V. Wir wählen eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $U_1\cap U_2$, und ergänzen diese sowohl zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ von U_1 als auch zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_p)$ von U_2. Dann ist $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_p)$ eine Basis von U_1+U_2.