16. Lineare Abbildungen als Matrizen

Wir wollen uns jetzt genauer mit linearen Abbildungen beschäftigen. Sind V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume, so wissen wir aus Bemerkung 13.19 bereits, dass die Menge

$$\operatorname{Hom}(V,W) = \{f\colon V \to W \text{ ist Morphismus}\}$$

der linearen Abbildungen von V nach W selbst wieder ein K-Vektorraum ist. Wir wollen diesen Vektorraum nun genau beschreiben, d. h. angeben, wie *alle* Morphismen von V nach W konkret aussehen.

Die entscheidende Idee hierfür ist, dass V und W nach Satz 14.22 isomorph zu K^n bzw. K^m (mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$) sind. Gemäß der Idee, dass isomorphe Vektorräume praktisch ununterscheidbar sind, werden wir gleich in Abschnitt 16.A also zunächst einmal den Fall von linearen Abbildungen von K^n nach K^m genau untersuchen. Danach können wir dann in Abschnitt 16.B studieren, wie wir diese Ergebnisse mit Hilfe von Isomorphismen auf lineare Abbildungen zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W übertragen können.

16.A Matrizen

Lineare Abbildungen von K^n nach K^m können am besten in der Sprache der Matrizen angegeben werden, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 16.1 (Matrizen)**.** Es seien K ein Körper und $m,n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-**Matrix** mit Einträgen in K ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{i,j} \in K \text{ für } 1 \le i \le m \text{ und } 1 \le j \le n$$

mit m Zeilen und n Spalten. Analog zur Schreibweise für Zahlenfolgen bezeichnen wir eine solche Matrix auch kurz mit

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{oder einfach} \quad (a_{i,j})_{i,j}.$$

Es ist eine Konvention, dass wir in diesem Fall hinter der Klammer immer zuerst den Zeilenindex und dann den Spaltenindex schreiben (Merkregel: „Zeile zuerst, Spalte später“). Im Fall $m = n$ nennen wir die Matrix A **quadratisch**.

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K wird mit $\operatorname{Mat}(m \times n, K)$ bezeichnet — auch hier steht in der Bezeichnung stets zuerst die Anzahl der Zeilen und dann die Anzahl der Spalten.

Definition 16.2 (Matrixoperationen)**.** Für $\lambda \in K$ sowie zwei Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ in $\operatorname{Mat}(m \times n, K)$ definieren wir

(a) die Addition $A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$;

(b) die Skalarmultiplikation $\lambda A := (\lambda a_{i,j})_{i,j} \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$;

(c) die **transponierte Matrix** $A^{\mathsf{T}} := (a_{j,i})_{i,j} \in \operatorname{Mat}(n \times m, K)$.

Beispiel 16.3. Die Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen ist einfach komponentenweise definiert, es ist also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(2\times 3,\mathbb{R})$. Die Transposition hingegen vertauscht die Rolle von Zeilen und Spalten in der Matrix, wie z. B. in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 16.4.

(a) Offensichtlich ist $\mathrm{Mat}(m\times n,K)$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus Definition 16.2 ein K-Vektorraum. In der Tat unterscheidet sich dieser Raum von $K^{m\cdot n}$ ja nur dadurch, dass wir die $m\cdot n$ Einträge der Matrix nicht untereinander, sondern in einem rechteckigen Schema anordnen. Mathematisch exakt bedeutet dies, dass die Abbildung

$$\mathrm{Mat}(m\times n,K)\to K^{m\cdot n}, \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,1} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist. So ist also $\dim \mathrm{Mat}(m\times n,K) = \dim K^{m\cdot n} = m\cdot n$, und die vier Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden z. B. eine Basis von $\mathrm{Mat}(2\times 2,K)$ (nämlich die Basis, die im K^4 der Standardbasis entspricht): Jede 2×2-Matrix lässt sich auf eindeutige Art als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}A_1 + a_{1,2}A_2 + a_{2,1}A_3 + a_{2,2}A_4$$

dieser vier Matrizen schreiben.

(b) Der Nullvektor im Vektorraum $\mathrm{Mat}(m\times n,K)$ ist offensichtlich die Matrix, in der alle Einträge gleich 0 sind. Diese Matrix wird dementsprechend auch die **Nullmatrix** genannt und einfach als 0 geschrieben.

(c) Matrizen in $\mathrm{Mat}(m\times 1,K)$ mit nur einer Spalte haben in ihrer Schreibweise die gleiche Form wie Vektoren in K^m. In der Tat werden wir $m\times 1$-Matrizen im Folgenden in der Regel mit Vektoren in K^m identifizieren.

(d) Offensichtlich ist die Transpositionsabbildung

$$\mathrm{Mat}(m\times n,K)\to \mathrm{Mat}(n\times m,K),\ A\mapsto A^{\mathsf{T}}$$

ein Isomorphismus: Es gilt $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$ und $(\lambda A)^{\mathsf{T}} = \lambda A^{\mathsf{T}}$ für alle $\lambda\in K$ und $A,B\in \mathrm{Mat}(m\times n,K)$, und die Umkehrabbildung ist durch erneute Transposition gegeben.

35

Bisher gibt es bis auf die Art der Anordnung der Zahlen keinen nennenswerten Unterschied zwischen den Matrizen in $\mathrm{Mat}(m\times n,K)$ und den Vektoren in K^{mn}. Es gibt jedoch eine sehr wichtige weitere Operation, die auf Matrizen, jedoch nicht auf Vektoren in K^{mn} definiert ist, nämlich die sogenannte *Matrixmultiplikation*:

Definition 16.5 (**Matrixmultiplikation**). Für $m,n,p\in\mathbb{N}$ seien $A=(a_{i,j})_{i,j}\in \mathrm{Mat}(m\times n,K)$ und $B=(b_{j,k})_{j,k}\in \mathrm{Mat}(n\times p,K)$, d. h. die Matrix B habe so viele Zeilen wie A Spalten. Dann definieren wir das Matrixprodukt AB als

$$AB := A\cdot B := \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}\Big)_{i,k} \in \mathrm{Mat}(m\times p,K)$$

(merke: Es wird über die „mittleren Indizes“ summiert, also über den Spaltenindex der ersten und den Zeilenindex der zweiten Matrix). Das Produkt AB hat also so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite.

Beispiel 16.6.

(a) Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

(hier ist $m = n = p = 2$). Im Gegensatz dazu ist das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

nicht definiert, weil die erste Matrix nur eine Spalte, die zweite aber zwei Zeilen hat. Der Einfachheit halber werden wir in Zukunft bei einem Matrixprodukt AB stets voraussetzen, dass die zweite Matrix so viele Zeilen hat wie die erste Spalten, und dies nicht jedesmal wieder erwähnen.

(b) Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $x \in K^n$ mit Komponenten $x_1, \dots, x_n$, so können wir x gemäß Bemerkung 16.4 (c) als Matrix mit nur einer Spalte auffassen und erhalten das Matrixprodukt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times 1, K) = K^m.$$

(c) Ein einfacher, aber oft vorkommender und daher wichtiger Spezialfall von (b) ist, wenn $x = e_j$ für $j = 1, \dots, n$ der j-te Einheitsvektor ist: In diesem Fall ist Ae_j gerade die j-te Spalte von A.

Wie üblich nach dem Einführen einer neuen Struktur wollen wir auch hier zunächst einmal die grundlegenden Eigenschaften der Matrixmultiplikation angeben bzw. beweisen.

Lemma 16.7 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)**.** *Für alle Matrizen A, B, C passender Größe (d. h. so dass die betrachteten Summen und Produkte definiert sind) sowie $\lambda \in K$ gilt:*

(a) *(Distributivität) $A(B+C) = AB + AC$ und $(A+B)C = AC + BC$.*

(b) *(Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.*

(c) *(Assoziativität) $(AB)C = A(BC)$.*

(d) *(Verträglichkeit mit der Transposition) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$.*

Das Matrixprodukt ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ (aufgrund der Größenbedingung ist das Produkt AB ja noch nicht einmal genau dann definiert, wenn BA es ist).

Beweis. Der Beweis ergibt sich in allen Fällen durch einfaches Nachrechnen. Wir zeigen exemplarisch Teil (a): Für $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B = (b_{j,k})_{j,k}, C = (c_{j,k})_{j,k} \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}(b_{j,k} + c_{j,k}) \Big)_{i,k} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k} + \sum_{j=1}^n a_{i,j} c_{j,k} \Big)_{i,k} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k} \Big)_{i,k} + \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j} c_{j,k} \Big)_{i,k} \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 16.8. Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(a) Berechne A^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(b) Bestimme eine Basis des Quotientenraums $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) / \mathrm{Lin}((A^n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}})$.

Aufgabe 16.9 (Blockmatrixmultiplikation). Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ zwei Matrizen, die in „Blockform“

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

mit $A_1 \in \mathrm{Mat}(m_1 \times n_1, K)$ und $B_1 \in \mathrm{Mat}(n_1 \times p_1, K)$ gegeben sind. Zeige, dass das Matrixprodukt AB dann ebenfalls in Blockform

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)$$

berechnet werden kann (wobei die Blöcke formal genauso multipliziert und addiert werden, als würde man das Produkt zweier Matrizen der Größe 2×2 berechnen). Analog funktioniert diese Rechenregel auch für eine Aufteilung in noch mehr Blöcke.

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation können wir jetzt sehr einfach lineare Abbildungen von K^n nach K^m konstruieren.

Konstruktion 16.10. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Dann ist

$$f \colon K^n \to K^m, \; x \mapsto Ax$$

eine lineare Abbildung, denn für alle $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt nach Lemma 16.7

$$f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y) \quad \text{sowie} \quad f(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda f(x).$$

In Koordinaten ist diese Funktionsvorschrift also durch den Ausdruck in Beispiel 16.6 (b) gegeben.

In der Tat wollen wir jetzt sehen, dass bereits *alle* linearen Abbildungen von K^n nach K^m diese Form haben, und Konstruktion 16.10 damit eine Bijektion zwischen dem Raum aller Matrizen und dem Raum aller linearen Abbildungen liefert.

Satz und Definition 16.11 (Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Matrizen)**.** *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$.*

(a) *Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gibt es genau einen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ mit*

$$f(x) = Ax \quad \textit{für alle } x \in K^n.$$

Wir bezeichnen ihn mit f_A.

(b) *Zu jedem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ gibt es genau eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ mit*

$$f(x) = Ax \quad \textit{für alle } x \in K^n,$$

*nämlich $A = (\, f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n)\,)$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von f und bezeichnen sie mit A_f.*

Dies liefert einen Isomorphismus $\mathrm{Mat}(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, $A \mapsto f_A$ mit Umkehrabbildung $f \mapsto A_f$. Insbesondere ist also $\dim \mathrm{Hom}(K^n, K^m) = mn$.

Beweis.

(a) Die geforderte Bedingung definiert offensichtlich eine eindeutige Abbildung $f \colon K^n \to K^m$, die nach Konstruktion 16.10 auch linear ist.

(b) Die geforderte Bedingung legt nach Beispiel 16.6 (c) für alle $j = 1, \dots, n$ die j-te Spalte von A fest zu $Ae_j = f(e_j)$. Damit ist A eindeutig bestimmt. Da f linear ist, folgt aus dieser Beziehung für die Einheitsvektoren weiterhin auch für alle $x \in K^n$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$

$$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1Ae_1 + \cdots + x_nAe_n = Ax.$$

Da die geforderte Bedingung in (a) und (b) dieselbe ist, ist außerdem klar, dass die Abbildungen $A \mapsto f_A$ und $f \mapsto A_f$ invers zueinander sind. Weiterhin ist die Abbildung $A \mapsto f_A$ linear, denn für alle $A,B \in \mathrm{Mat}(m \times n,K)$ und $\lambda \in K$ ist

$$f_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax+Bx = f_A(x)+f_B(x) \quad \text{und} \quad f_{\lambda A}(x) = (\lambda A)x = \lambda Ax = \lambda f_A(x),$$

d. h. es ist $f_{A+B} = f_A + f_B$ und $f_{\lambda A} = \lambda f_A$. Damit ist $\mathrm{Mat}(m \times n,K) \to \mathrm{Hom}(K^n,K^m)$, $A \mapsto f_A$ ein Isomorphismus. □

Lemma 16.12. *Unter dem Isomorphismus aus Satz 16.11 entspricht die Matrixmultiplikation der Verkettung von Morphismen, d. h. für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n,K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p,K)$ gilt*

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \colon K^p \to K^m.$$

Beweis. Für alle $x \in K^p$ gilt

$$f_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = A f_B(x) = f_A(f_B(x)) = (f_A \circ f_B)(x),$$

und damit ist $f_{AB} = f_A \circ f_B$. □

Bemerkung 16.13. Genau wie in Beispiel 13.31 bedeutet auch dieser Isomorphismus anschaulich formuliert wieder, dass Matrizen in $\mathrm{Mat}(m \times n,K)$ und lineare Abbildungen von K^n nach K^m „im Prinzip dasselbe" sind: Man kann jederzeit zwischen Matrizen und linearen Abbildungen hin- und herwechseln ohne etwas am Ergebnis zu ändern; dabei entspricht eine Matrix A der linearen Abbildung $f_A \colon x \mapsto Ax$, und eine lineare Abbildung $f \colon K^n \to K^m$ der Matrix A_f, die man erhält, wenn man in die Spalten die Bilder der Einheitsvektoren unter f schreibt.

Beispiel 16.14. Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2,\mathbb{R})$$

ist die zugehörige lineare Abbildung nach Satz 16.11

$$f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ist umgekehrt $f = f_A$ diese Abbildung, so erhält man daraus die zugehörige Abbildungsmatrix wieder durch

$$A_f = (\, f(e_1) \mid f(e_2)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zurück.

Da Matrizen linearen Abbildungen entsprechen, können wir nun auch ursprünglich für lineare Abbildungen definierte Konzepte wie Bilder, Kerne und Isomorphismen in die Sprechweise der Matrizen übertragen. Dies wollen wir im restlichen Teil dieses Abschnitts tun.

Definition 16.15 (Bild und Kern einer Matrix)**.** Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n,K)$ eine Matrix mit zugehöriger linearer Abbildung $f_A \colon K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$.

(a) Das **Bild** von A ist definiert als das Bild

$$\mathrm{Im}\,A := \mathrm{Im}\,f_A = \{Ax : x \in K^n\};$$

der zugehörigen linearen Abbildung; nach Lemma 13.21 (a) ist dies ein Unterraum von K^m.

(b) Der **Kern** von A ist definiert als der Kern

$$\mathrm{Ker}\,A := \mathrm{Ker}\,f_A = \{x \in K^n : Ax = 0\};$$

der zugehörigen linearen Abbildung; nach Lemma 13.21 (b) ist dies ein Unterraum von K^n.

Bemerkung 16.16.

(a) (Dimensionsformel für Matrizen) Die Dimensionsformel für Morphismen aus Folgerung 15.25 überträgt sich natürlich sofort auf Matrizen: Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n,K)$ (die ja einer Abbildung von K^n nach K^m entsprechen) gilt

$$\dim \mathrm{Im}\,A + \dim \mathrm{Ker}\,A = n.$$

(b) Ist $f\colon K^n \to K^m$ ein Morphismus mit zugehöriger Matrix $A = A_f \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, so ist der Morphismus $f\colon K^n \to \mathrm{Im}\, f$, der daraus durch Einschränkung des Zielraums entsteht, natürlich surjektiv und bildet damit nach Satz 14.21 (b) die Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von K^n auf ein Erzeugendensystem $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ von $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, A$ ab. Da $f(e_1), \dots, f(e_n)$ nach Satz 16.11 aber genau die Spalten von A sind, erhalten wir die einfache Aussage:

Das Bild einer Matrix ist der von ihren Spalten erzeugte Unterraum.

So ist z. B. das Bild der Matrix A aus Beispiel 16.14

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2.$$

Der Kern von A hingegen ist nach Definition

$$\mathrm{Ker}\, A = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(insbesondere ist hier die Dimensionsformel aus (a) also als $2 + 0 = 2$ erfüllt).

Um den Begriff der Isomorphismen zu übertragen, müssen wir uns offensichtlich auf quadratische Matrizen beschränken, da isomorphe Vektorräume nach Satz 14.21 (c) die gleiche Dimension haben, ein Isomorphismus $K^n \to K^m$ also nur für $m = n$ existieren kann. Zunächst müssen wir dazu die identische Abbildung in die Sprache der Matrizen übertragen.

Konstruktion 16.17 (Einheitsmatrix)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Einheitsmatrix** der Größe $n \times n$ als

$$E_n := (\, e_1 \mid \cdots \mid e_n \,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K).$$

Wir schreiben sie oft auch einfach als E, wenn ihre Größe aus dem Zusammenhang klar ist. In der Literatur ist auch die Bezeichnung I_n oder I üblich.

Da in den Spalten von E_n gerade die Einheitsvektoren stehen, entspricht sie gemäß Satz 16.11 der Identität auf K^n. Die Gleichungen $\mathrm{id}_{K^m} \circ f = f \circ \mathrm{id}_{K^n} = f$ für eine beliebige (lineare) Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ liefern also sofort

$$E_m A = A E_n = A \quad \text{für alle } A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K),$$

weil die Verkettung linearer Abbildungen nach Lemma 16.12 der Matrixmultiplikation entspricht (natürlich könnte man dies auch direkt mit Definition 16.5 nachrechnen). Die Einheitsmatrizen der passenden Größe sind in diesem Sinne also neutrale Elemente für die Matrixmultiplikation.

Damit können wir nun das Konzept von Isomorphismen, also invertierbaren Morphismen, ganz analog zur Definition inverser Elemente in Definition 3.1 (c) in die Sprache der Matrizen übersetzen:

Definition 16.18 (Invertierbare Matrizen)**.** Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $A' \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gibt mit $A'A = AA' = E_n$.

Die Menge aller invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ wird mit $\mathrm{GL}(n, K)$ bezeichnet (der Name kommt von der englischen Bezeichnung „general linear group“ und rührt daher, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ in der Tat eine Gruppe ist, wie wir gleich in Lemma 16.20 zeigen werden).

Lemma und Definition 16.19 (Inverse Matrizen)**.** *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.*

(a) *Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre zugehörige lineare Abbildung f_A ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist die Matrix A' in Definition 16.18 eindeutig bestimmt als die Matrix zur Umkehrabbildung f_A^{-1}. Wir nennen sie die zu A **inverse Matrix** und schreiben sie als A^{-1}.*

(b) *Für die Invertierbarkeit von A genügt es bereits, in Definition 16.18 eine der beiden Gleichungen $A'A = E_n$ und $AA' = E_n$ vorauszusetzen.*

Beweis.

(a) Die Abbildung f_A ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es einen Umkehrmorphismus g mit $g \circ f_A = f_A \circ g = \mathrm{id}_{K^n}$ gibt (der dann natürlich nach Lemma 2.20 (c) eindeutig bestimmt ist). In Matrixsprechweise übersetzt bedeutet dies nach Lemma 16.12 und Konstruktion 16.17 aber gerade $A'A = AA' = E_n$ (wobei A' die Abbildungsmatrix von g ist), also genau die Definition 16.18 der Invertierbarkeit.

(b) Es sei $A'A = E_n$ oder $AA' = E_n$. Nach Lemma 16.12 und Konstruktion 16.17 gilt dann für die zugehörigen linearen Abbildungen $f_{A'} \circ f_A = \mathrm{id}_{K^n}$ oder $f_A \circ f_{A'} = \mathrm{id}_{K^n}$. Dies bedeutet nach Lemma 2.20 aber genau, dass f_A injektiv oder surjektiv, und damit nach Folgerung 15.26 bereits ein Isomorphismus ist. Die Behauptung folgt damit aus Teil (a). □

Wir werden später in Algorithmus 17.14 noch sehen, wie man von einer gegebenen quadratischen Matrix A bestimmen kann, ob sie invertierbar ist, und wie man in diesem Fall die inverse Matrix A^{-1} konkret berechnen kann. Für den Moment begnügen wir uns damit, die folgenden einfachen Eigenschaften invertierbarer Matrizen zu zeigen:

Lemma 16.20 (Eigenschaften invertierbarer Matrizen)**.** *Es seien $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ invertierbare Matrizen. Dann gilt:*

(a) *AB ist ebenfalls invertierbar, und es ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(b) *A^{-1} ist ebenfalls invertierbar, und es ist $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(c) *A^{T} ist ebenfalls invertierbar, und es ist $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.*

Insbesondere ist $\mathrm{GL}(n,K)$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation (mit neutralem Element E und zu A inversem Element A^{-1}).

Beweis. Alle Aussagen ergeben sich durch einfaches Nachrechnen mit Hilfe von Lemma 16.19 (b):

(a) Es gilt $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$. Also ist AB invertierbar mit inverser Matrix $B^{-1}A^{-1}$.

(b) Die Gleichung $A^{-1}A = E$ besagt natürlich auch gerade, dass A die inverse Matrix zu A^{-1} ist.

(c) Nach Lemma 16.7 (d) ist $(A^{-1})^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} = (AA^{-1})^{\mathsf{T}} = E^{\mathsf{T}} = E$. Also ist $(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ die inverse Matrix zu A^{T}. □

36

Beispiel 16.21. Wir betrachten noch einmal die Matrix A mit zugehöriger linearer Abbildung f_A aus Beispiel 16.14, also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist diese Abbildung bijektiv: Die Umkehrung ist gegeben durch $x_1 = y_1 - 2y_2$ und $x_2 = y_2$, also

$$f_A^{-1} \colon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit zugehöriger Matrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle kann man natürlich auch das Matrixprodukt

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

(und genauso $AA^{-1} = E$) sofort mit Definition 16.5 nachrechnen.

16.B Lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen

Nachdem wir mit Satz 16.11 jetzt lineare Abbildungen zwischen K^n und K^m durch Matrizen beschreiben können, wollen wir nun den Fall von Morphismen zwischen beliebigen (endlich-dimensionalen) Vektorräumen darauf zurückführen. Dazu erinnern wir uns daran, dass jeder n-dimensionale Vektorraum V isomorph zu K^n ist, indem wir einen Vektor auf seine Koordinaten bezüglich einer gewählten Basis abbilden:

Definition 16.22 (Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren)**.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraums V, so dass sich also jeder Vektor $x \in V$ eindeutig als Linearkombination $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ schreiben lässt. Dann heißt die Abbildung

$$\Phi_B \colon V \to K^n,\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

(die nach Satz 14.22 ein Isomorphismus ist), die **Koordinatenabbildung** bezüglich B; dementsprechend heißt $\Phi_B(x) \in K^n$ für ein $x \in V$ der **Koordinatenvektor** von x bezüglich B.

Der Koordinatenvektor enthält also exakt die gleichen Informationen wie der ursprüngliche Vektor selbst. Wollen wir nun eine lineare Abbildung $f \colon V \to W,\ x \mapsto f(x)$ zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen beschreiben, so können wir daher genauso gut Basen von V und W wählen und die zugehörige lineare Abbildung betrachten, die den Koordinatenvektor von x auf den von $f(x)$ abbildet. Dies ist dann ein Morphismus von K^n nach K^m mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$, den wir also genau wie bisher durch Multiplikation mit einer Abbildungsmatrix erhalten können.

Formal bedeutet dies einfach, dass wir Satz 16.11 mehr oder weniger abschreiben können, wenn wir in den Matrixprodukten nur alle Vektoren (sowohl im Start- als auch im Zielraum) durch ihre Koordinatenvektoren ersetzen.

Satz und Definition 16.23 (Lineare Abbildungen $V \to W$ und Matrizen)**.** *Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$. Ferner seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$ fest gewählte Basen von V bzw. W.*

(a) *Zu jeder Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ gibt es genau einen Morphismus $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit*

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V.$$

Wir bezeichnen ihn mit $f_A^{B,C}$.

(b) *Zu jedem Morphismus $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gibt es genau eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ mit*

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

*nämlich $A = (\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n)))$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von f bezüglich B und C und bezeichnen sie mit $A_f^{B,C}$.*

Dies liefert einen Isomorphismus $\operatorname{Mat}(m \times n, K) \to \operatorname{Hom}(V, W),\ A \mapsto f_A^{B,C}$ mit Umkehrabbildung $f \mapsto A_f^{B,C}$. Insbesondere ist also $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Beweis. Man könnte diesen Satz zeigen, indem man ihn mit Hilfe der Koordinatenabbildungen auf Satz 16.11 zurückführt. Da der Beweis so kurz ist, ist es aber vermutlich übersichtlicher, ihn einfach nochmal neu aufzuschreiben:

(a) Die geforderte Bedingung definiert f eindeutig zu $f(x) = \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x))$ für alle $x \in V$, was (als Verkettung linearer Abbildungen) offensichtlich ein Morphismus ist.

(b) Da der Koordinatenvektor von x_j bezüglich B gerade der j-te Einheitsvektor ist, bestimmt die geforderte Bedingung nach Beispiel 16.6 (c) für alle $j = 1, \dots, n$ die j-te Spalte von A zu $Ae_j = A\Phi_B(x_j) = \Phi_C(f(x_j))$. Damit ist A eindeutig festgelegt. Mit der Linearität von f und der Koordinatenabbildungen folgt aus dieser Beziehung weiterhin auch für alle $x \in V$ mit Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezüglich B

$$\begin{aligned}\Phi_C(f(x)) &= \Phi_C(f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)) = \lambda_1 \Phi_C(f(x_1)) + \cdots + \lambda_n \Phi_C(f(x_n)) \\ &= \lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n = A \cdot \Phi_B(x).\end{aligned}$$

Da die Bedingung in (a) und (b) dieselbe ist, ist natürlich klar, dass die Abbildungen $A \mapsto f_A^{B,C}$ und $f \mapsto A_f^{B,C}$ invers zueinander sind. Die Linearität von $A \mapsto f_A^{B,C}$ überprüft man unmittelbar genau wie im Beweis von Satz 16.11. □

Bemerkung 16.24.

(a) Ist bereits $V = K^n$ und $W = K^m$, und sind B und C die Standardbasen dieser Vektorräume, so sind die Koordinatenabbildungen Φ_B und Φ_C die Identität auf V bzw. W. Satz 16.23 stimmt dann also genau mit Satz 16.11 überein.

(b) Man kann sich die Satz 16.23 zugrunde liegende Idee auch an dem rechts dargestellten Diagramm verdeutlichen: In der oberen Zeile ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ dargestellt. Mit Hilfe der vertikal dargestellten Koordinatenabbildungen (die ja Isomorphismen sind, was durch die Schlangen am Beginn der Pfeile angedeutet werden soll) können wir daraus eine Abbildung $g = \Phi_C \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ von K^n nach K^m konstruieren, indem wir im Diagramm „den Umweg über f nehmen“.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr", "\Phi_B"'] & W \arrow[d, "\wr"', "\Phi_C"] \\ K^n \arrow[r, "g"'] & K^m \end{tikzcd}$$

Dieser neue Morphismus $g\colon K^n \to K^m$ ist nun genau die am Anfang dieses Abschnitts beschriebene Abbildung, die für alle $x \in V$ den Koordinatenvektor von x auf den von $f(x)$ abbildet. Wir können sie mit einer gewöhnlichen Abbildungsmatrix A im Sinne von Satz 16.11 beschreiben, es ist also

$$g(v) = Av, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_C(f(\Phi_B^{-1}(v))) = Av \quad \text{für alle } v \in K^n.$$

Mit der Substitution $v = \Phi_B(x)$ ist dies nun aber äquivalent zu

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

also genau zu unserer Bedingung aus Satz 16.23.

Beispiel 16.25. Es seien $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$ und

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \le \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Man überprüft sofort, dass C eine Basis von W ist und die Abbildung

$$f\colon V \to W, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$$

linear ist sowie wirklich V nach W abbildet (denn die Summe der Koordinaten der Bildvektoren ist ja immer gleich 0). Wir wollen nun die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ bestimmen. Dazu müssen wir nach Definition 16.11 einfach nur die Basisvektoren e_1 und e_2 von B mit f abbilden und die Ergebnisse als Linearkombinationen der Basisvektoren von C ausdrücken:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{und}\quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Die dabei benötigten Vorfaktoren sind nun also die Koordinatenvektoren von $f(e_1)$ und $f(e_2)$ bezüglich C; wir schreiben sie als Spaltenvektoren in die Abbildungsmatrix und erhalten

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Beachte, dass diese Matrix wegen $\dim V = \dim W = 2$ die Größe 2×2 hat (obwohl W ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist). Natürlich hätten wir f hier auch als Morphismus von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ auffassen und ihm damit auch ohne Basiswahl eine Abbildungsmatrix (der Größe 3×2) wie in Definition 16.11 zuordnen können. Deutlicher wird die Notwendigkeit der Verwendung von Basen im allgemeinen Fall im folgenden Beispiel.

Beispiel 16.26. Es sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit der Basis $B = (1,x,x^2)$, und W der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 1 mit der Basis $C = (1,x)$ (siehe Beispiel 14.7 (d)). Wir betrachten wie in Beispiel 13.17 (c) die lineare Abbildung $f\colon V \to W$, $\varphi \mapsto \varphi'$, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.

(a) Um die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ zu bestimmen, müssen wir nach Definition 16.23 wieder die Basisvektoren von B abbilden und als Linearkombinationen der Basiselemente von C schreiben:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1' &&= 0 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot x,\\ f(x) &= x' &&= 1 &&= 1\cdot 1 + 0\cdot x,\\ f(x^2) &= (x^2)' &&= 2x &&= 0\cdot 1 + 2\cdot x. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden also die Koordinatenvektoren von $f(1)$, $f(x)$ und $f(x^2)$; wir schreiben sie als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(b) Auch die umgekehrte Richtung, aus der Abbildungsmatrix die Abbildung zu rekonstruieren, ist nicht weiter schwierig, wenn man sich daran erinnert, dass die Matrix immer nur Koordinatenvektoren sieht. Angenommen, wir wollen $f(\varphi)$ für $\varphi = 2x^2+3x+4$, also letztlich die Ableitung φ', nur aus der Kenntnis der Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ bestimmen. Dann brauchen wir zunächst den Koordinatenvektor $\Phi_B(\varphi)$ und können diesen dann an die Abbildungsmatrix multiplizieren: Wegen $\varphi = 4\cdot 1 + 3\cdot x + 2\cdot x^2$ ist

$$\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \text{und damit}\quad A_f^{B,C}\cdot\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Nach Satz 16.23 ist dies nun der Koordinatenvektor $\Phi_C(f(\varphi))$ des Bildes $f(\varphi)$. Damit ist $f(\varphi) = 3\cdot 1 + 4\cdot x = 4x+3$ (was in der Tat die Ableitung von φ ist).

Eine einfache Folgerung aus Satz 16.23 ist, dass sich lineare Abbildungen stets auf einer Basis des Startraums beliebig vorgeben lassen und dann eindeutig bestimmt sind:

Folgerung 16.27. *Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von V und $(v_1,\dots,v_n)$ eine beliebige Familie (mit gleich vielen Elementen) in W.*

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f\colon V\to W$ mit $f(x_i) = v_i$ für alle $i = 1,\dots,n$.

Beweis. Wähle eine Basis C von W, und betrachte die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ der gesuchten Morphismen. Ihre i-te Spalte für $i = 1,\dots,n$ ist nach Beispiel 16.6 (c) und Satz 16.23 gerade

$$A_f^{B,C} e_i = A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x_i) = \Phi_C(f(x_i)).$$

Die Bedingungen $f(x_i) = v_i$, also $\Phi_C(f(x_i)) = \Phi_C(v_i)$, sind daher äquivalent dazu, dass die Abbildungsmatrix gleich $A_f^{B,C} = (\,\Phi_C(v_1) \mid \cdots \mid \Phi_C(v_n)\,)$ ist, und liefern damit genau einen solchen Morphismus. □

Nach Konstruktion hängen die gerade eingeführten Abbildungsmatrizen $A_f^{B,C}$ natürlich von der (letztlich willkürlichen) Wahl der Basen B und C im Start- bzw. Zielraum der Abbildung f ab. Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Abbildungsmatrizen ändern, wenn man zu anderen Basen übergeht. Dazu benötigen wir die sogenannten Basiswechselmatrizen, die letztlich ein Spezialfall von Abbildungsmatrizen sind.

Definition 16.28 (Basiswechselmatrizen)**.** Es seien $B = (x_1,\dots,x_n)$ und $B' = (y_1,\dots,y_n)$ zwei Basen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann heißt die Abbildungsmatrix der Identität id_V bezüglich der Startbasis B' und Zielbasis B, nach Definition 16.23 also

$$A^{B',B} := A_{\mathrm{id}}^{B',B} = (\,\Phi_B(y_1) \mid \cdots \mid \Phi_B(y_n)\,) \quad \in \mathrm{Mat}(n \times n, K),$$

die **Basiswechselmatrix** von B' nach B.

Bemerkung 16.29. Es seien B und B' zwei Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V.

(a) Offensichtlich ist stets $A^{B,B} = E$.

(b) Nach Satz 16.23 ist $A^{B',B}$ die eindeutig bestimmte Matrix mit $\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x)$ für alle $x \in V$. Die Basiswechselmatrix wandelt also einfach nur einen Koordinatenvektor bezüglich B' in einen bezüglich B um — was auch den Namen erklärt.

Beispiel 16.30. Wollen wir für die beiden Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ die Basiswechselmatrix $A^{B',B}$ bestimmen, so müssen wir die beiden Basisvektoren von B' nach Definition 16.28 als Linearkombination der Vektoren aus B schreiben: Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden wieder die Koordinatenvektoren bezüglich B, wir schreiben sie also in die Spalten der gesuchten Matrix

$$A^{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 16.31. *Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *Für jede weitere Basis B' von V ist $A^{B',B}$ invertierbar mit $(A^{B',B})^{-1} = A^{B,B'}$.*

(b) *Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt es eine Basis B' von V mit $A^{B',B} = T$.*

(c) *Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt es eine Basis B' von V mit $A^{B,B'} = T$.*

Beweis.

(a) Nach Bemerkung 16.29 (b) ist $\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x)$ und $\Phi_{B'}(x) = A^{B,B'} \cdot \Phi_B(x)$ für alle $x \in V$. Setzen wir dies ineinander ein, erhalten wir für alle $x \in V$

$$\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot A^{B,B'} \cdot \Phi_B(x).$$

Wiederum nach Bemerkung 16.29 (b) ist $A^{B',B} \cdot A^{B,B'}$ also die Basiswechselmatrix von B nach B, d. h. nach Bemerkung 16.29 (a) gilt $A^{B',B} \cdot A^{B,B'} = E$ und damit $(A^{B',B})^{-1} = A^{B,B'}$.

(b) Wir setzen $y_i = \Phi_B^{-1}(Te_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Da T invertierbar und Φ_B^{-1} ein Isomorphismus ist, ist auch $K^n \to V$, $x \mapsto \Phi_B^{-1}(Tx)$ ein Isomorphismus, und bildet nach Satz 14.21 (c) damit die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ auf eine Basis $B' := (y_1, \dots, y_n)$ von V ab.

Für $i = 1, \dots, n$ ist die i-te Spalte der Basiswechselmatrix $A^{B',B}$ nun nach Definition

$$\Phi_B(y_i) = \Phi_B(\Phi_B^{-1}(Te_i)) = Te_i,$$

also die i-te Spalte von T. Damit ist wie gewünscht $A^{B',B} = T$.

(c) Nach (b) gibt es eine Basis B' mit $A^{B',B} = T^{-1}$, nach (a) also mit $A^{B,B'} = T$. □

Mit diesen Basiswechselmatrizen können wir nun konkret angeben, wie sich Abbildungsmatrizen bei einem Basiswechsel transformieren.

Satz 16.32 (Verhalten von Abbildungsmatrizen unter Basiswechsel)**.** *Es sei $f: V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich erzeugten Vektorräumen mit gegebenen Basen B bzw. C.*

(a) *Sind B' und C' zwei weitere Basen von V bzw. W, so gilt*

$$A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B}.$$

(b) *Sind umgekehrt $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ zwei invertierbare Matrizen, so gibt es Basen B' und C' von V bzw. W, so dass $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$, und damit*

$$A_f^{B',C'} = S \cdot A_f^{B,C} \cdot T.$$

Beweis.

(a) Nach Definition 16.23 bzw. Bemerkung 16.29 (b) gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{C'}(y) &= A^{C,C'} \cdot \Phi_C(y) && \text{für alle } y \in W,\\
\Phi_C(f(x)) &= A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x) && \text{für alle } x \in V,\\
\text{und} \qquad \Phi_B(x) &= A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x) && \text{für alle } x \in V.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies für $y = f(x)$ ineinander ein, so erhalten wir

$$\Phi_{C'}(f(x)) = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

und damit nach Satz 16.11 wie gewünscht $A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B}$.

(b) Nach Lemma 16.31 (b) und (c) existieren Basen B' und C' mit $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$; die behauptete Formel für die Abbildungsmatrix ergibt sich dann aus (a). □

Aufgabe 16.33.

(a) Wir betrachten die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Abbildungsmatrix A_f von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

(b) Es sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$, $x \mapsto \overline{x}$ mit $U = \mathrm{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Bestimme eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 16.34. Es seien V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit der Basis $B = (1, x, x^2)$, und $f : V \to V$ die Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$ für alle $\varphi \in V$.

(a) Überprüfe, dass f linear ist, und berechne die Abbildungsmatrix $A_f^{B,B}$.

(b) Zeige, dass $A_f^{B,B}$ invertierbar ist und berechne die inverse Matrix $\left(A_f^{B,B}\right)^{-1}$.

(c) Zeige, dass es zu jeder Basis C' von V eine Basis C von V gibt mit

$$A_f^{C,C'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.35. Man zeige: Sind $f : V \to V'$ und $g : V' \to V''$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sowie B, B' und B'' Basen von V, V' bzw. V'', so gilt

$$A_{g \circ f}^{B,B''} = A_g^{B',B''} \cdot A_f^{B,B'}.$$

Aufgabe 16.36 (Spur)**.** Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad \in K,$$

also als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Man zeige:

(a) Für alle $A, A' \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AA') = \mathrm{Spur}(A'A)$.

(b) Sind V ein endlich erzeugter Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so ist $\mathrm{Spur}\, A_f^{B,B}$ für jede Basis B von V die gleiche Zahl. Wir bezeichnen sie daher auch mit $\mathrm{Spur}\, f$.

(c) Ist f wie in (b) und $U := \mathrm{Im}\, f$, so gilt $\mathrm{Spur}(f|_U) = \mathrm{Spur}\, f$, wobei $f|_U : U \to U,\ x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U im Start- und Zielbereich bezeichnet.

16.C Äquivalente Matrizen und Normalformen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass man einen Morphismus $f : V \to W$ zwischen endlich erzeugten Vektorräumen erst dann durch eine Abbildungsmatrix beschreiben kann, wenn man Basen B und C von V bzw. W gewählt hat. Wir wollen nun untersuchen, in wie weit man aber zumindest durch eine geschickte Wahl dieser Basen erreichen kann, dass die resultierende Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ eine möglichst einfache Form hat (also z. B. viele Nullen enthält).

Dazu erinnern wir uns daran, dass ein Basiswechsel in B oder C nach Satz 16.32 dazu führt, dass die Abbildungsmatrix von rechts bzw. links mit einer invertierbaren Matrix multipliziert wird, und dass auch umgekehrt jede Multiplikation von $A_f^{B,C}$ mit einer invertierbaren Matrix von rechts oder links
37 einem Basiswechsel entspricht. Wir definieren daher:

Definition 16.37 (Äquivalente Matrizen)**.** Zwei Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ heißen **äquivalent**, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt mit $A' = SAT$.

Bemerkung 16.38.

(a) Wie man leicht nachprüfen kann, ist die Äquivalenz von Matrizen in der Tat eine Äquivalenzrelation (siehe Definition 2.27).

(b) Nach Satz 16.32 sind zwei Matrizen genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe lineare Abbildung, nur bezüglich evtl. verschiedener Basen im Start- und Zielraum beschreiben.

Unser Ziel ist es also, zu einer gegebenen Matrix eine äquivalente Matrix möglichst einfacher Gestalt zu finden. Da wir durch die beidseitige Multiplikation mit beliebigen invertierbaren Matrizen sehr viele Möglichkeiten haben, eine gegebene Matrix zu einer äquivalenten umzuformen, könnte man sich vielleicht sogar fragen, ob zwei Matrizen (derselben Größe) womöglich immer zueinander äquivalent sind. Dies ist jedoch nicht der Fall — es gibt eine sogenannte „Invariante“, d. h. eine

Zahl, die man einer Matrix zuordnen kann, und die beim Übergang zu einer beliebigen äquivalenten Matrix immer gleich bleibt. Hat man also zwei Matrizen, bei denen diese Invariante verschieden ist, so können diese damit nicht äquivalent zueinander sein. Diese Invariante ist der sogenannte Rang einer Matrix, den wir jetzt einführen wollen.

Definition 16.39 (Rang eines Morphismus bzw. einer Matrix)**.**

(a) Ist $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich erzeugten Vektorräumen, so heißt die Zahl $\operatorname{rk} f := \dim \operatorname{Im} f$ der **Rang** von f (die Bezeichnung kommt vom englischen Wort „rank“).

(b) Für eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ heißt die Zahl $\operatorname{rk} A := \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rk} f_A$ der **Rang** von A.

Bemerkung 16.40.

(a) Ist $f\colon V \to W$ ein Morphismus, so ist natürlich $\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{Im} f \le \dim W$. Nach der Dimensionsformel für Morphismen aus Folgerung 15.25 gilt aber auch

$$\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f \le \dim V.$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Matrizen: Für $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ ist stets sowohl $\operatorname{rk} A \le m$ als auch $\operatorname{rk} A \le n$ (denn $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} f_A$ mit $f_A\colon K^n \to K^m$).

(b) Für eine quadratische Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} A = n \;&\Leftrightarrow\; \dim \operatorname{Im} f_A = n \\
&\Leftrightarrow\; f_A \text{ ist surjektiv} \\
&\Leftrightarrow\; f_A \text{ ist ein Isomorphismus} && \text{(Folgerung 15.26)} \\
&\Leftrightarrow\; A \in \operatorname{GL}(n, K) && \text{(Lemma 16.19 (a))}.
\end{aligned}$$

(c) Es sei $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix mit Spalten $x_1, \dots, x_n \in K^m$. Nach Bemerkung 16.16 (b) ist dann $\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_n)$. Wir können aus diesen n Vektoren also eine Basis von $\operatorname{Im} f$ auswählen, die dann natürlich so viele Elemente hat, wie es linear unabhängige Vektoren unter den $x_1, \dots, x_n$ gibt. Also ist $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_n)$ die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in $(x_1, \dots, x_n)$, d. h. die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten in A.

Beispiel 16.41. Nach Bemerkung 16.40 (c) ist z. B.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Wie oben schon erwähnt hat der Rang einer Matrix die wichtige Eigenschaft, sich beim Übergang zu einer äquivalenten Matrix nicht zu ändern. Dies wollen wir jetzt beweisen.

Lemma 16.42. *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich erzeugten Vektorräumen. Dann gilt*

$$\operatorname{rk} A_f^{B,C} = \operatorname{rk} f$$

für alle Basen B und C von V bzw. W, d. h. der Rang der Abbildungsmatrix von f ist unabhängig von der Wahl der Basen.

Insbesondere haben äquivalente Matrizen also denselben Rang.

Beweis. Nach Satz 16.23 ist $A_f^{B,C} = (\,\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n))\,)$ mit $B = (x_1, \dots, x_n)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} A_f^{B,C} &= \dim \operatorname{Lin}(\Phi_C(f(x_1)), \dots, \Phi_C(f(x_n))) && \text{(Bemerkung 16.16 (b))} \\
&= \dim \Phi_C(f(V)) && \text{(Satz 14.21 (b))} \\
&= \dim f(V) && (\Phi_C \text{ ist ein Isomorphismus}) \\
&= \operatorname{rk} f.
\end{aligned}$$

□

Wir können nun zeigen, dass wir zu jedem Morphismus $f\colon V \to W$ Basen vom Start- und Zielraum so finden können, dass die zugehörige Abbildungsmatrix eine sehr einfache Form hat:

Satz und Definition 16.43 (Normalform von Abbildungsmatrizen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus vom Rang r zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es Basen B und C von V bzw. W, so dass die Abbildungsmatrix von f bezüglich dieser Basen die Form*

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \text{\Large 0} \\ 0 & & 1 & \\ \hline & \text{\Large 0} & & \text{\Large 0} \end{array}\right)$$

hat, d. h. so dass Einsen genau auf den ersten r Diagonalpositionen stehen, und sonst überall Nullen. Man sagt, dass eine solche Abbildungsmatrix in ***Normalform*** *ist. (Beachte dabei, dass unter der Einheitsmatrix E_r genau $m-r$ Nullzeilen, rechts von der Einheitsmatrix hingegen $n-r$ Nullspalten stehen — die Matrix $A_f^{B,C}$ ist also nicht notwendig quadratisch.)*

Beweis. Nach der Dimensionsformel aus Folgerung 15.25 ist $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = n - r$. Wähle nun eine Basis $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ von $\operatorname{Ker} f$ und ergänze diese zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V. Dann ist $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r})$ nach Bemerkung 15.18 eine Basis des Quotientenraums $V/\operatorname{Ker} f$.

Nach dem Homomorphiesatz 15.22 ist nun aber die Abbildung $V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$ ein Isomorphismus, und damit ist $(y_1, \dots, y_r)$ mit $y_i := f(x_i)$ für $i = 1, \dots, r$ nach Satz 14.21 (c) eine Basis von $\operatorname{Im} f$. Wir ergänzen diese schließlich noch zu einer Basis $C = (y_1, \dots, y_m)$ von W. Wegen

$$f(x_i) = \begin{cases} y_i & \text{für } i \le r, \\ 0 & \text{für } i > r \quad (\text{denn dann ist } x_i \in \operatorname{Ker} f) \end{cases}$$

hat die Matrix $A_f^{B,C}$ nach Definition 16.23 dann die gewünschte Form (z. B. ist die erste Spalte dieser Matrix der Koordinatenvektor von $f(x_1) = y_1$ bezüglich C, also der erste Einheitsvektor). □

Bemerkung 16.44.

(a) Nach Definition 16.37 können wir Satz 16.43 auch so formulieren: Ist $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ eine beliebige Matrix vom Rang r, so ist A äquivalent zu der Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Analog zu Satz 16.43 nennt man dies auch die **Normalform** von A (bezüglich der Äquivalenz von Matrizen); sie ist die „einfachste“ Matrix in der Äquivalenzklasse von A.

(b) Beachte, dass der Beweis von Satz 16.43 konstruktiv ist, also auch die konkrete Berechnung der Basen B und C ermöglicht.

Eine erste wichtige und überraschende Folgerung aus Satz 16.43 ist die Aussage, dass der Rang einer Matrix A mit dem Rang der transponierten Matrix A^T übereinstimmt, dass $\operatorname{rk} A$ also (gemäß Bemerkung 16.40 (c)) nicht nur die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten, sondern auch die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in A ist.

Folgerung 16.45. *Für jede Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ gilt $\operatorname{rk}(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rk} A$.*

Beweis. Nach Bemerkung 16.44 (a) gibt es $S \in \operatorname{GL}(m, K)$ und $T \in \operatorname{GL}(n, K)$, so dass

$$SAT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit $r = \operatorname{rk} A$. Nach Lemma 16.7 (d) gilt dann auch

$$T^\mathsf{T} A^\mathsf{T} S^\mathsf{T} = (SAT)^\mathsf{T} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^\mathsf{T} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

(wobei sich beim letzten Gleichheitszeichen die Größe der Matrix von $m \times n$ auf $n \times m$ ändert). Nach Lemma 16.20 (c) sind mit S und T ferner auch S^T und T^T invertierbar, d. h. $T^\mathsf{T} A^\mathsf{T} S^\mathsf{T}$ ist äquivalent zu A^T. Damit ergibt sich aus Lemma 16.42

$$\operatorname{rk} A^\mathsf{T} = \operatorname{rk}(T^\mathsf{T} A^\mathsf{T} S^\mathsf{T}) = \operatorname{rk} \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = r = \operatorname{rk} A. \qquad \square$$

Aufgabe 16.46. Wir betrachten den Morphismus $f\colon \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, $M \mapsto M + M^\mathsf{T}$.

(a) Berechne die Abbildungsmatrix von f bezüglich der „Standardbasis“ von $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ aus Bemerkung 16.4 (a) als Start- und Zielbasis.

(b) Finde Basen B und C von $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $A_f^{B,C}$ in Normalform ist.

Aufgabe 16.47. Man zeige:

(a) Für alle $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \operatorname{Mat}(n \times p, K)$ gilt $\operatorname{rk}(AB) \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$.

(b) Ist $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix vom Rang r, so gibt es Matrizen $B \in \operatorname{Mat}(m \times r, K)$ und $C \in \operatorname{Mat}(r \times n, K)$ mit $A = BC$.

Aufgabe 16.48. Es sei $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix vom Rang r. Für $k \leq \min(m, n)$ verstehen wir unter einer $k \times k$-*Teilmatrix* von A einer Matrix, die man erhält, indem man aus A eine beliebige Auswahl von Zeilen und Spalten herausstreicht, so dass eine quadratische Matrix der Größe $k \times k$ übrig bleibt.

Zeige, dass es genau dann eine invertierbare $k \times k$-Teilmatrix von A gibt, wenn $k \leq r$ gilt.