2. Relationen und Funktionen

Nachdem wir Mengen eingeführt haben, wollen wir nun auch mehrere von ihnen miteinander in Beziehung setzen können. Das Grundkonzept hierfür ist das einer Relation.

Definition 2.1 (Relationen)**.** Es seien M und N zwei Mengen. Eine **Relation** zwischen M und N ist eine Teilmenge R des Produkts $M \times N$. Für $x \in M$ und $y \in N$ mit $(x,y) \in R$ sagen wir dann „*x steht (bezüglich R) in Relation zu y*“. Ist $M = N$, so nennen wir R auch eine *Relation auf M*.

Bemerkung 2.2. Um eine Relation R anzugeben, also eine Teilmenge $R \subset M \times N$ zu definieren, müssen wir demzufolge einfach für alle Paare (x,y) mit $x \in M$ und $y \in N$ festlegen, ob $(x,y) \in R$ gelten, also ob x in Relation zu y stehen soll.

Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, werden Relationen in der Mathematik für völlig unterschiedliche Konzepte verwendet — z. B. um Zahlen miteinander zu vergleichen wie in Beispiel 2.3 (b), um eine Menge auf eine andere abzubilden wie in Abschnitt 2.A, oder um die Elemente einer Menge nach bestimmten Kriterien zu Klassen zusammenzufassen wie in Abschnitt 2.B. Dementsprechend sind für die Aussage „x steht bezüglich R in Relation zu y“ auch je nach Anwendung ganz unterschiedliche Notationen üblich. Für allgemeine, nicht näher spezifizierte Relationen schreibt man hierfür oft $x R y$.

Beispiel 2.3.

(a) Es sei M die Menge aller derzeit an der TU Kaiserslautern eingeschriebenen Studenten und N die Menge aller in diesem Semester angebotenen Vorlesungen. Dann ist

$$R = \{(x,y) : x \text{ hört } y\}$$

eine Relation zwischen M und N.

(b) Für $M = N = \mathbb{R}$ betrachten wir die Relation

$$R = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y\},$$

für die x also genau dann in Relation zu y steht, wenn $x < y$ gilt. Man nennt R deshalb auch die *Kleiner-Relation* auf $\mathbb{R}$. Die Notation „$x R y$“ aus Bemerkung 2.2 stimmt in diesem Fall also mit der Schreibweise „$x < y$“ überein, wenn man die Relation R direkt mit dem Symbol „$<$“ bezeichnet. In der Tat ist es aus diesem Grund bei manchen Relationen üblich, sie gleich mit Symbolen statt mit Buchstaben zu benennen.

2.A Funktionen

Die mit Abstand wichtigsten Relationen sind ohne Zweifel die Funktionen, die ihr natürlich bereits hinlänglich aus der Schule kennt. Wir wollen sie hier nun exakt einführen und ihre ersten Eigenschaften untersuchen.

Definition 2.4 (Funktionen)**.** Es seien M und N zwei Mengen.

(a) Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von M nach N, geschrieben $f\colon M \to N$, ist eine Relation zwischen M und N, bezüglich der jedes Element x von M zu *genau einem* Element y von N in Relation steht. Wir schreiben dies dann als $x \mapsto y$ oder $y = f(x)$ und sagen, y ist das **Bild** von x unter f bzw. der **Wert** von f in x.

(b) Die Menge M bezeichnet man als **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** der Funktion. Die Menge N heißt **Zielmenge** oder **Zielraum** von f.

Bemerkung 2.5.

(a) Um eine Funktion komplett festzulegen, müssen wir zuerst einmal den Start- und Zielraum angeben, und dann schließlich noch von jedem Element des Startraums sagen, auf welches Element des Zielraums es abgebildet wird. In welcher Form wir diese Zuordnung angeben — ob durch eine Formel, durch explizites Auflisten der Funktionswerte aller Elemente des Startraums, oder irgendwie anders — spielt dabei keine Rolle. So sind z. B.

$$f\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2, \quad g\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3, \quad h\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

trotz ihrer ganz verschieden aussehenden Vorschriften dieselbe Funktion, da alle drei den gleichen Start- und Zielraum haben und aus den gleichen Zuordnungen $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 2$ bestehen. Mit anderen Worten sind zwei Funktionen $f, g\colon M \to N$ also genau dann gleich, wenn sie an jedem Punkt die gleichen Werte besitzen, also wenn gilt

$$\forall x \in M : f(x) = g(x).$$

(b) Man sieht leider oft, dass eine Funktion $f\colon M \to N$ als $f(x)$ geschrieben wird. Es ist wichtig zu verstehen, dass diese Notation gemäß Definition 2.4 falsch ist: Mit $f(x)$ wird *der Wert der Funktion f in einem Punkt* $x \in M$ bezeichnet. Somit ist $f(x)$ (für gegebenes x) ein Element von N, und damit ein ganz anderes mathematisches Objekt als die Funktion selbst, die wir nur mit f bezeichnen und die eine Relation zwischen M und N ist. Dies mag auf den ersten Blick spitzfindig erscheinen — wir werden aber später noch oft Mengen sehen, deren Elemente Funktionen sind, und dann ist es natürlich wichtig, dies von der Menge ihrer Funktions*werte* zu unterscheiden.

Beispiel 2.6.

(a) Die Zuordnungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x \le 0 \\ x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

sind in dieser Form keine zulässigen Funktionsdefinitionen, weil im Fall von f der Zahl 0 kein gültiger Funktionswert zugeordnet wird und im Fall g für die Zahl 0 zwei (sich widersprechende) Festlegungen des Funktionswertes gemacht werden. Dies lässt sich jedoch in beiden Fällen leicht reparieren, z. B. indem man die Festlegungen abändert in

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}.$$

(b) Zu jeder Menge M gibt es die **identische Abbildung**

$$\mathrm{id}_M\colon M \to M,\ x \mapsto x,$$

die jedes Element auf sich selbst abbildet.

(c) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$ eine Teilmenge des Startraums, so erhält man durch die Einschränkung der Definitionsmenge von M auf A eine neue Abbildung, die wir mit

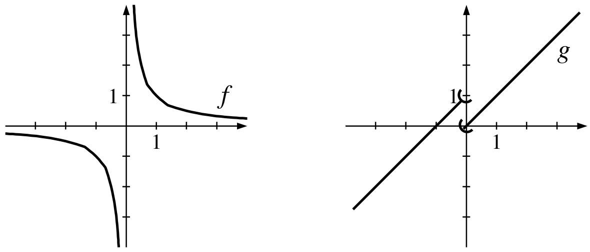
$$f|_A\colon A \to N,\ x \mapsto f(x)$$

bezeichnen und die die **Einschränkung** von f auf A genannt wird. Genauso kann man natürlich auch die Zielmenge N auf eine Teilmenge B einschränken, wenn f nur Werte in B annimmt. Es ist üblich, bei einer derartigen Einschränkung der Zielmenge immer noch den gleichen Namen für die Abbildung zu verwenden, also dann $f\colon M \to B$ zu schreiben (auch wenn es sich dabei um eine andere Funktion als das ursprüngliche $f\colon M \to N$ handelt).

Bemerkung 2.7 (Graph einer Abbildung)**.** Zu einer Abbildung $f: M \to N$ heißt die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in M\} \quad \subset M \times N$$

der **Graph** von f. Sind M und N Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist dieser Graph also eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, und man kann ihn leicht zeichnen und dadurch die Abbildung veranschaulichen. Für die Abbildungen aus Beispiel 2.6 (a) sieht dies z. B. so aus:



Beachte, dass dieser Graph nach den Definitionen 2.1 und 2.4 eigentlich sogar genau das gleiche ist wie die Funktion selbst, nämlich die Teilmenge des Produkts $M \times N$, die aus den Paaren (x, y) besteht, für die x bezüglich f in Relation zu y steht, also $y = f(x)$ gilt. Der Begriff des Graphen soll hier also nur noch einmal deutlich machen, dass man sich die Funktion gerade wirklich als ein derart „grafisches" Objekt vorstellt und nicht als eine „Zuordnung" von M nach N.

In der Definition 2.4 einer Abbildung $f: M \to N$ verlangen wir, dass jedem Element von M genau ein Element von N zugeordnet wird. Wir fordern jedoch nicht auch umgekehrt, dass jedes Element des Zielraums N das Bild von genau einem Element von M ist, oder dass es überhaupt als Bild eines Elements von M auftritt. Abbildungen, die diese Eigenschaften dennoch besitzen, haben spezielle Namen, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 2.8 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

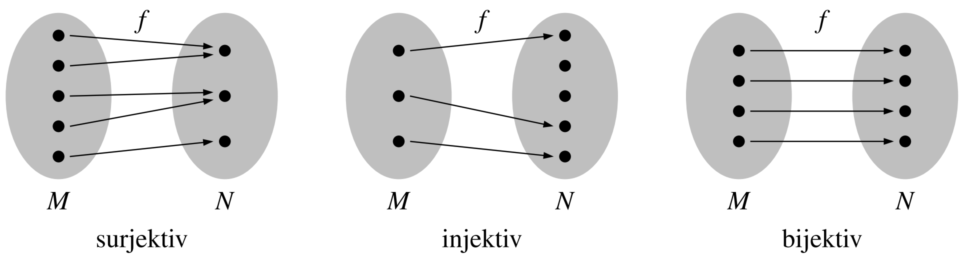
(a) Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so heißt x ein **Urbild** von y unter f.

(b) Hat jedes $y \in N$ ...

  (i) *mindestens* ein Urbild, so heißt f **surjektiv**.
  In Quantoren bedeutet dies: $\forall y \in N \; \exists x \in M : f(x) = y$.

  (ii) *höchstens* ein Urbild, so heißt f **injektiv**.
  In Quantoren bedeutet dies: $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. (Also: Haben zwei Elemente des Startraums das gleiche Bild, so müssen sie bereits dasselbe Element sein.)

  (iii) *genau* ein Urbild, ist f also surjektiv und injektiv, so heißt f **bijektiv**.



Beispiel 2.9. Betrachten wir noch einmal die Funktionen aus Beispiel 2.6 (a) bzw. Bemerkung 2.7. Die Funktion f ist nicht surjektiv, da das Element 0 des Zielraums kein Urbild hat. Sie ist jedoch injektiv: Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, so folgt durch Multiplikation mit $x_1 x_2$ sofort $x_1 = x_2$.

Die Funktion g dagegen ist surjektiv: Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ hat als Urbild $x = y$ für $y \geq 0$, und $x = y - 1$ für $y < 0$. Sie ist allerdings nicht injektiv, denn es ist $g(-1) = g(0) = 0$.

Beachte, dass diese Eigenschaften auch von der Wahl der Start- und Zielmenge abhängen: So wird z. B. f bijektiv, wenn man die Zielmenge $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ersetzt.

Aufgabe 2.10. Wie viele Abbildungen gibt es zwischen den Mengen $\{1,2,3,4\}$ und $\{1,2,3,4,5,6\}$? Wie viele von ihnen sind injektiv?

Bilder und Urbilder unter Abbildungen betrachtet man oft auch von ganzen Mengen statt nur von Punkten:

Definition 2.11. Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Für $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \quad \subset N$$

(also die Menge aller Bilder von Punkten in A) das **Bild** von A unter f.

(b) Ist $B \subset N$, so heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \quad \subset M$$

(also die Menge aller Urbilder von Punkten in B) das **Urbild** von B unter f.

Bemerkung 2.12. Die Grundidee der Notation in Definition 2.11 (a) ist: Schreiben wir als Argument einer Funktion $f\colon M \to N$ eine *Teilmenge* statt einem *Element* von M, so bedeutet dies, dass wir alle Werte $f(x)$ für $x \in M$ zusammen nehmen und diese wieder in einer Menge zusammenfassen. Diese Schreibweise verwendet man auch oft, wenn die Funktion aus einer Rechenverknüpfung besteht, wie z. B. in

$$\mathbb{N}+\tfrac{1}{2} := \left\{n+\tfrac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2},\dots\right\} \quad \text{oder} \quad 3\mathbb{Z} := \{3n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\}.$$

Beispiel 2.13. Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ aus Beispiel 2.6 (a) ist $f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$ und $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Beispiel 2.14. Zwischen den Konstruktionen von Bild und Urbild aus Definition 2.11 und den Mengenoperationen aus Abschnitt 1.B gibt es sehr viele Beziehungen. Um einmal exemplarisch zu sehen, wie derartige Beziehungen aussehen und bewiesen werden können, wollen wir nun zeigen, dass für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und zwei beliebige Teilmengen $A,B \subset M$ stets

$$f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B) \tag{$*$}$$

gilt.

Zum Beweis müssen wir zeigen, dass jedes Element der linken Menge auch in der rechten Menge liegt. Es sei also $y \in f(A)\backslash f(B)$ beliebig. Insbesondere ist damit $y \in f(A)$, nach Definition 2.11 (a) also $y = f(x)$ für ein $x \in A$. Würde nun auch $x \in B$ gelten, so hätten wir wegen $y = f(x)$ auch $y \in f(B)$, im Widerspruch zu $y \in f(A)\backslash f(B)$. Also ist $x \notin B$, und damit $x \in A\backslash B$. Damit besagt $y = f(x)$ aber gerade $y \in f(A\backslash B)$. Insgesamt haben wir somit die behauptete Teilmengenbeziehung $(*)$ gezeigt.

Beachte allerdings, dass in $(*)$ im Allgemeinen keine Gleichheit gilt: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ mit $A = \{-1,1\}$ und $B = \{-1\}$ ist

$$f(A)\backslash f(B) = \{1\}\backslash\{1\} = \emptyset, \quad \text{aber} \quad f(A\backslash B) = f(\{1\}) = \{1\}.$$

Aufgabe 2.15. Beweise die folgenden Teilmengenbeziehungen und untersuche jeweils, ob auch die Gleichheit gilt.

(a) Für alle Mengen M,A,B gilt $M\backslash(A\cup B) \subset (M\backslash A)\cap(M\backslash B)$.

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset N$, so ist $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.

Aufgabe 2.16. Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Finde für das Symbol $\square$ jeweils eine der Mengenbeziehungen $\subset, =, \supset$, so dass die folgenden Aussagen wahr werden, und beweise die so entstandenen Aussagen!

(a) $f(A)\cap f(B) \;\square\; f(A\cap B)$ für alle $A,B \subset M$.

(b) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \,\square\, f^{-1}(A \cap B)$ für alle $A, B \subset N$.

Als Nächstes wollen wir nun die euch sicher bereits bekannte Verkettung, also die Hintereinanderausführung von Funktionen einführen.

Definition 2.17 (Verkettung von Funktionen)**.** Es seien $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to R$ zwei Abbildungen (also so dass die Zielmenge von f gleich der Startmenge von g ist). Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f \colon M \to R,\ x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von f und g. 02

Bemerkung 2.18. Bei der Verkettung zweier Funktionen kommt es natürlich auf die Reihenfolge an, allein schon weil in der Situation von Definition 2.17 in der Regel der Zielraum von g ja nicht mit dem Startraum von f übereinstimmt und die „umgekehrte Verkettung“ $f \circ g$ damit gar nicht definierbar wäre. Beachte dabei, dass die Notation $g \circ f$ lautet, obwohl wir zuerst f (von M nach N) und dann g (von N nach R) anwenden. Diese vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Notation kommt einfach daher, dass die Buchstaben in der gleichen Reihenfolge stehen sollen wie bei der Abbildungsvorschrift $x \mapsto g(f(x))$.

Wir wollen nun unser erstes *Lemma* beweisen — „Lemma“ ist griechisch und bedeutet eigentlich „Annahme“, aber in der Mathematik wird dieser Begriff für einen *Hilfssatz* verwendet, also für ein kleines Zwischenresultat, das vielleicht für sich genommen nicht übermäßig überraschend oder interessant ist, aber das in späteren Beweisen immer wieder nützlich sein wird. In unserem momentanen Fall geht es einfach darum, dass die Verkettung von Abbildungen *assoziativ* ist (siehe auch Definition 3.1):

Lemma 2.19 (Assoziativität der Verkettung)**.** *Sind $f \colon M \to N$, $g \colon N \to R$ und $h \colon R \to S$ drei Abbildungen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (Man schreibt für diese Abbildung daher oft auch einfach $h \circ g \circ f$.)*

Beweis. Nach Definition 2.4 können wir die Gleichheit zweier Funktionen zeigen, indem wir für jedes Element der Startmenge nachweisen, dass sein Bild unter beiden Funktionen übereinstimmt. Dies rechnen wir nun einfach durch wiederholtes Einsetzen von Definition 2.17 nach: Es gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

und

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Da diese beiden Ausdrücke übereinstimmen, ist das Lemma bewiesen. □

Schließlich wollen wir nun noch sehen, wie sich die Begriffe der Surjektivität, Injektivität und Bijektivität aus Definition 2.8 (b) äquivalent mit Hilfe von Umkehrfunktionen ausdrücken lassen.

Lemma 2.20 (Umkehrfunktionen)**.** *Es sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Dann gilt:*

(a) *f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g \colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

(b) *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g \colon N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.*

(c) *f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g \colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.*

*In diesem Fall ist diese Abbildung g eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die **Umkehrfunktion** bzw. **Umkehrabbildung** von f und bezeichnen sie mit f^{-1}.*

Beweis. Wir beweisen die Richtungen „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“ der drei Teile separat.

(a) „$\Rightarrow$“: Es sei f surjektiv. Dann können wir

$$g\colon N \to M,\ y \mapsto \text{ein Urbild von } y \text{ unter } f$$

setzen (wobei wir, falls mehrere solche Urbilder existieren, jeweils eines auswählen). Für alle $y \in N$ gilt dann $f(g(y)) = y$, da $g(y)$ ja ein Urbild von y unter f ist. Also ist $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

„$\Leftarrow$“: Es gebe ein $g\colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Ist dann $y \in N$ beliebig, so können wir $x = g(y)$ setzen, und es gilt $f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_N(y) = y$. Also hat jedes solche y ein Urbild unter f, d. h. f ist surjektiv.

(b) „$\Rightarrow$“: Es sei f injektiv. Dann setzen wir

$$g\colon N \to M,\ y \mapsto \begin{cases} \text{das eindeutig bestimmte Urbild von } y \text{ unter } f, \text{ falls eines existiert,} \\ \text{ein beliebiges Element von } M \text{ sonst} \end{cases}$$

(wobei wir in der zweiten Zeile die Voraussetzung $M \neq \emptyset$ brauchen). Für alle $x \in M$ ist dann $g(f(x))$ nach Konstruktion das eindeutige Urbild von $f(x)$ unter f, also x. Damit folgt $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

„$\Leftarrow$“: Es gebe ein $g\colon N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Wir müssen zeigen, dass f injektiv ist, also die Bedingung aus Definition 2.8 (b)(ii) überprüfen. Es seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Anwenden von g liefert $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, wegen $g \circ f = \mathrm{id}_M$ also $x_1 = x_2$. Damit ist f injektiv.

(c) „$\Rightarrow$“: Ist f bijektiv, so können wir

$$g\colon N \to M,\ y \mapsto \text{das eindeutig bestimmte Urbild von } y \text{ unter } f$$

setzen. Da diese Definition zu denen aus (a) und (b) „$\Rightarrow$“ passt, zeigen die obigen Rechnungen also, dass f dann surjektiv und injektiv und damit bijektiv ist.

„$\Leftarrow$“: Dies folgt sofort aus Teil „$\Leftarrow$“ von (a) und (b).

Eindeutigkeit von g: Es seien $g_1, g_2\colon N \to M$ zwei Umkehrfunktionen von f, insbesondere ist also $f \circ g_2 = \mathrm{id}_N$ und $g_1 \circ f = \mathrm{id}_M$. Dann gilt

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_N = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{2.19}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_M \circ g_2 = g_2. \qquad \square$$

Bemerkung 2.21 (Urbilder und Umkehrabbildungen)**.** Beachte, dass wir das Urbild einer Menge unter einer Abbildung $f\colon M \to N$ in Definition 2.11 (b) mit dem gleichen Symbol f^{-1} bezeichnet haben wie (im Fall einer bijektiven Abbildung) die Umkehrabbildung aus Lemma 2.20 (c). Das ist vielleicht etwas unglücklich gewählt, aber in der Literatur so fest verankert, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Bei genauem Hinschauen kann man aber auch immer feststellen, was gemeint ist:

Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung, so bezeichnet ...
... $f^{-1}(B)$ für eine *Menge* $B \subset N$ das *Urbild* von B wie in Definition 2.11 (b); es existiert für jede Abbildung f.
... $f^{-1}(y)$ für ein *Element* $y \in B$ den *Wert der Umkehrabbildung* bei y wie in Lemma 2.20 (c); er existiert nur für bijektives f.

Letztlich hängen diese beiden Notationen aber auch eng miteinander zusammen: Ist f bijektiv und ist $x \in M$ mit $f(x) = y$, so ist $f^{-1}(y) = x$ (mit f^{-1} im Sinne der Umkehrabbildung) und $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ (mit f^{-1} im Sinne des Urbildes).

Aufgabe 2.22.

(a) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (xy, x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ surjektiv, so ist auch $g \circ f\colon M \to R$ surjektiv.

Aufgabe 2.23. Es seien $f: M \to N$ und $g: N \to R$ bijektiv. Zeige, dass dann auch $f^{-1}: N \to M$ und $g \circ f: M \to R$ bijektiv sind.

Aufgabe 2.24. Man beweise oder widerlege:

(a) Sind $f: M \to N$ und $g: N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(b) Sind $f: M \to N$ und $g: N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

Aufgabe 2.25. Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Man beweise:

$$f \text{ ist surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } A,B \subset N \text{ mit } f^{-1}(A) = f^{-1}(B) \text{ gilt } A = B.$$

2.B Äquivalenzrelationen

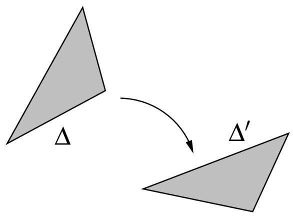
Am Anfang dieses Kapitels haben wir allgemeine Relationen eingeführt, als einzigen Spezialfall davon aber bisher nur die Funktionen ausführlicher betrachtet. Wir wollen daher nun noch einen ganz anderen wichtigen Typ von Relationen studieren, die sogenannten Äquivalenzrelationen.

Angenommen, wir möchten eine Menge M untersuchen, die uns zunächst einmal zu groß oder zu kompliziert erscheint. Es gibt dann zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, wie man daraus eine kleinere bzw. einfachere Menge machen kann:

- Wir können uns auf eine Teilmenge von M beschränken.
- Wir können Elemente von M miteinander identifizieren bzw. sie als gleich ansehen, wenn sie für das zu untersuchende Problem ähnliche Eigenschaften haben.

Diese zweite Idee der Identifizierung ähnlicher Elemente führt zum Begriff der Äquivalenzrelationen. Sie klingt vielleicht zunächst etwas abstrakt, ist euch aber sicher schon an vielen Stellen begegnet. Hier ist ein einfaches Beispiel dafür.

Beispiel 2.26 (Kongruente Dreiecke)**.** Es sei M die Menge aller Dreiecke in $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich heißen zwei solche Dreiecke $\Delta, \Delta' \in M$ zueinander *kongruent*, wenn sie wie im Bild rechts durch eine Drehung und / oder Verschiebung auseinander hervorgehen — wir schreiben dies im Folgenden als $\Delta \sim \Delta'$. Zueinander kongruente Dreiecke werden oft miteinander identifiziert, nämlich immer dann, wenn es uns nur auf die Form bzw. Größe der Dreiecke, aber nicht auf ihre Lage in der Ebene ankommt.



Wenn wir z. B. sagen, dass die drei Seitenlängen ein Dreieck eindeutig bestimmen, dann meinen wir damit in Wirklichkeit, dass sie das Dreieck *bis auf Kongruenz* eindeutig bestimmen, also nur die Form und Größe festlegen, aber nicht die Lage des Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Formal kann man dies so ausdrücken: zu einem Dreieck Δ nennt man

$$\overline{\Delta} := \{\Delta' \in M : \Delta' \sim \Delta\},$$

also die Menge aller zu Δ kongruenten Dreiecke, die *Kongruenzklasse* von Δ. Die Menge aller dieser Kongruenzklassen bezeichnen wir mit

$$M/\sim \;:=\; \{\overline{\Delta} : \Delta \in M\}.$$

Man kann dann z. B. sagen, dass die Seitenlängen eines Dreiecks ein eindeutiges Element in $M/\sim$ bestimmen, also eine eindeutige Kongruenzklasse von Dreiecken festlegen — nicht aber ein eindeutiges Element von M.

Mit der Idee dieses Beispiels im Kopf wollen wir nun den Begriff der Äquivalenzrelation exakt definieren.

Definition 2.27 (Äquivalenzrelationen)**.** Es sei $\sim$ wie in Definition 2.1 eine Relation auf einer Menge M. Wie in Bemerkung 2.2 schreiben wir $x \sim y$, wenn x und y bezüglich $\sim$ in Relation stehen.

Man nennt $\sim$ eine **Äquivalenzrelation** auf M, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) **Reflexivität**: Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$.

(b) **Symmetrie**: Sind $x, y \in M$ mit $x \sim y$, so gilt auch $y \sim x$.

(c) **Transitivität**: Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so gilt auch $x \sim z$.

In diesem Fall sagt man statt $x \sim y$ auch, dass x (bezüglich dieser Relation) zu y **äquivalent** ist. Zu $x \in M$ heißt dann die Menge
$$\overline{x} := \{y \in M : y \sim x\}$$
aller Elemente, die zu x äquivalent sind, die **Äquivalenzklasse** von x; jedes Element dieser Menge nennt man einen **Repräsentanten** dieser Klasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen schreiben wir als
$$M/\sim \;:=\; \{\overline{x} : x \in M\}.$$

Beispiel 2.28.

(a) Die Kongruenz von Dreiecken aus Beispiel 2.26 ist eine Äquivalenzrelation (es ist offensichtlich, dass sie die Eigenschaften aus Definition 2.27 erfüllt). Die Äquivalenzklassen sind in diesem Fall genau die Kongruenzklassen.

(b) Auf der Menge $M = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist
$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$$
eine Äquivalenzrelation, denn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
- (Reflexivität) $x^2 = x^2$, und damit $x \sim x$;
- (Symmetrie) wenn $x \sim y$, also $x^2 = y^2$, dann ist natürlich auch $y^2 = x^2$ und damit $y \sim x$;
- (Transitivität) wenn $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x^2 = y^2$ und $y^2 = z^2$, dann ist auch $x^2 = z^2$ und damit $x \sim z$.

Die Äquivalenzklasse z. B. von $2 \in \mathbb{R}$ ist die Menge aller reellen Zahlen x mit $x \sim 2$, d. h. mit $x^2 = 2^2 = 4$. Es ist also $\overline{2} = \{-2, 2\}$, und sowohl 2 als auch -2 sind Repräsentanten dieser Klasse. Allgemein gilt $\overline{x} = \{-x, x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die Relation fasst also genau die Zahlen in Klassen zusammen, die den gleichen Betrag haben. Die Äquivalenzklassen bestehen demzufolge mit Ausnahme von $\overline{0} = \{0\}$ alle aus zwei Elementen.

Beachte, dass jede reelle Zahl in genau einer dieser Äquivalenzklassen liegt, dass wir also wirklich eine Aufteilung der Menge $M = \mathbb{R}$ in disjunkte Teilmengen haben. Dies ist in der Tat eine allgemeine Eigenschaft von Äquivalenzrelationen, wie wir gleich in Satz 2.29 sehen werden.

(c) Die „Kleiner-Relation" auf $\mathbb{R}$ aus Beispiel 2.3 (b), also die Relation, für die für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn $x < y$ ist, ist keine Äquivalenzrelation, da sie weder reflexiv noch symmetrisch ist.

Allgemein sind die Axiome einer Äquivalenzrelation aus Definition 2.27 anschaulich genau diejenigen, die man braucht, damit die Relation sinnvoll die Identifizierung von Elementen bzw. deren Zusammenfassung zu Äquivalenzklassen beschreiben kann. Dies zeigt auch noch einmal das folgende zentrale Lemma über Äquivalenzrelationen.

Satz 2.29 (Eigenschaften von Äquivalenzrelationen)**.** *Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.*

(a) *Für $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $\overline{x} = \overline{y}$. (Zwei Elemente sind also genau dann äquivalent zueinander, wenn sie die gleiche Äquivalenzklasse bestimmen.)*

(b) *Jedes Element $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse (nämlich in $\overline{x}$). Insbesondere ist M also die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen. Man sagt auch, dass die Äquivalenzklassen eine* Partition *von M bilden.*

Beweis.

(a) Es seien $x, y \in M$.

„⇒“: Es gelte $x \sim y$. Ist dann $z \in M$ mit $z \in \overline{x}$, also $z \sim x$, so ist nach der Transitivität wegen $x \sim y$ auch $z \sim y$, also $z \in \overline{y}$. Damit gilt $\overline{x} \subset \overline{y}$. Da mit $x \sim y$ wegen der Symmetrie aber auch $y \sim x$ gilt, folgt analog auch umgekehrt $\overline{y} \subset \overline{x}$, und somit insgesamt $\overline{x} = \overline{y}$.

„⇐“: Es sei nun $\overline{x} = \overline{y}$. Wegen der Reflexivität ist $x \sim x$, also $x \in \overline{x} = \overline{y}$, und damit $x \sim y$.

(b) Wegen der Reflexivität liegt natürlich jedes $x \in M$ in seiner eigenen Äquivalenzklasse $\overline{x}$. Ist nun auch $x \in \overline{y}$ für ein $y \in M$, also $x \sim y$, so gilt nach (a) bereits $\overline{y} = \overline{x}$. Also liegt x in genau einer Äquivalenzklasse von $\sim$, nämlich in $\overline{x}$. □

Aufgabe 2.30. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{R}^2$? Im Fall einer Äquivalenzrelation berechne und skizziere man außerdem die Äquivalenzklassen von $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ und $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

(a) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = a^2x'$ und $y = ay'$;

(b) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = ay'$ und $y = ax'$.

Bemerkung 2.31 (Wohldefiniertheit)**.** Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Möchte man auf der Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen eine Abbildung in eine andere Menge N definieren, so ist die Idee hierfür in der Regel, dass man eine Abbildung $g\colon M \to N$ wählt und dann

$$f\colon M/\sim \to N,\; f(\overline{x}) := g(x) \tag{$*$}$$

setzt. Man möchte das Bild einer Äquivalenzklasse unter f also dadurch definieren, dass man einen Repräsentanten dieser Klasse wählt und diesen dann mit g abbildet. Damit dies nun f widerspruchsfrei definiert, brauchen wir offensichtlich, dass das Ergebnis dieser Vorschrift nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt: Sind $x,y \in M$ äquivalent zueinander, sind sie also Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse, so muss $g(x) = g(y)$ gelten. Mit anderen Worten benötigen wir

$$g(x) = g(y) \quad \text{für alle } x,y \in M \text{ mit } \overline{x} = \overline{y},$$

damit die Definition $(*)$ widerspruchsfrei ist. Statt „widerspruchsfrei“ sagen Mathematiker in diesem Fall in der Regel, dass f durch die Vorschrift $(*)$ **wohldefiniert** ist. Die Wohldefiniertheit einer Funktion muss man also immer dann nachprüfen, wenn der Startraum der Funktion eine Menge von Äquivalenzklassen ist und die Funktionsvorschrift Repräsentanten dieser Klassen benutzt. Oder noch etwas allgemeiner: Wenn eine Funktionsvorschrift an irgendeiner Stelle eine Wahl beinhaltet, muss man sich vergewissern, dass der letztliche Funktionswert von dieser Wahl unabhängig ist.

Ist z. B. $M/\sim$ die Menge aller Kongruenzklassen ebener Dreiecke wie in Beispiel 2.26, so ist die Vorschrift

$$f\colon M/\sim \to \mathbb{R},\; \overline{\Delta} \mapsto \text{der Flächeninhalt von } \Delta$$

wohldefiniert (und bestimmt somit wirklich eine Funktion $f\colon M/\sim \to \mathbb{R}$): Da kongruente Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, spielt es keine Rolle, welchen Repräsentanten der Kongruenzklasse wir wählen, und somit ist der Flächeninhalt auch auf diesen Kongruenzklassen von Dreiecken wohldefiniert. Hingegen wäre

$$f\colon M/\sim \to \mathbb{R},\; \overline{\Delta} \mapsto \text{die kleinste } x\text{-Koordinate eines Eckpunkts von } \Delta$$

nicht wohldefiniert (bestimmt also keine Funktion), da die kleinste x-Koordinate von kongruenten Dreiecken in der Regel nicht übereinstimmt.

Aufgabe 2.32. Es sei M die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die folgende Relation auf M: Es sei

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } g(x) = c \cdot f(x).$$

Man zeige:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Relation $\sim$ besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

(c) Die Abbildung $\varphi\colon M/\sim \to M/\sim,\; \overline{f} \mapsto \overline{f^2}$ ist wohldefiniert und bijektiv.

03