Grundlagen der Mathematik 2: Analysis

23. Topologische Grundbegriffe

Wir haben nun unser Studium der linearen Algebra beendet und wenden uns wieder der Analysis zu. Unser Ziel für den Rest dieser Vorlesung wird es sein, die in den Kapiteln 5 bis 12 entwickelte Theorie für Funktionen in einer reellen Variablen — insbesondere die Differential- und Integralrechnung — auf den mehrdimensionalen Fall zu übertragen, also analoge Resultate z. B. auch für Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ zu finden. Da es bekanntlich die grundlegende Idee der Differentialrechnung ist, beliebige Funktionen durch lineare zu approximieren, werden unsere Ergebnisse zu linearen Abbildungen, die wir in den vorangegangenen Kapiteln zur linearen Algebra erzielt haben, dabei sehr nützlich sein.

23.A Normierte und metrische Räume

Erinnern wir uns an die eindimensionale Analysis zurück: Der zentrale Begriff, mit dem wir damals in Kapitel 5 begonnen haben, war der des Grenzwerts einer Folge. Wir haben dabei eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{K}$ genannt, wenn in jeder ε-Umgebung

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} : |x-a| < \varepsilon\} \qquad (*)$$

von a fast alle Folgenglieder a_n liegen (siehe Definition 5.1 und Bemerkung 5.2). Wenn wir diese Definition auf den höherdimensionalen Fall übertragen wollen, brauchen wir dazu offensichtlich eine Verallgemeinerung der Betragsfunktion, mit der wir in $(*)$ den Abstand von x zu a messen konnten. In der Tat haben wir so etwas in Definition 21.13 bereits kennengelernt: die Norm bzw. Länge eines Vektors. Wir wollen daher zuerst diesen Normbegriff genauer untersuchen. Wie schon in Bemerkung 21.21 erwähnt ist das Konzept einer Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum sehr allgemein und erlaubt nicht nur die Normen von Skalarprodukten, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben. Vielmehr ist eine allgemeine Norm definiert als eine Abbildung, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet und damit die erwarteten Eigenschaften erfüllt — nämlich genau diejenigen, die wir in Satz 21.20 für Normen zu Skalarprodukten bereits bewiesen haben.

Definition 23.1 (Normen und normierte Räume)**.** Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Abbildung $||\cdot|| \colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto ||x||$ eine **Norm** auf V, wenn für alle $x,y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

(b) $||x|| > 0$ für alle $x \neq 0$;

(c) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (**Dreiecksungleichung**).

Ein solcher $\mathbb{K}$-Vektorraum zusammen mit einer Norm wird als **normierter Raum** bezeichnet und manchmal auch als $(V, ||\cdot||)$ geschrieben.

Bemerkung 23.2. In jedem normierten Raum ist die Norm des Nullvektors nach Definition 23.1 (a) gleich $||0_V|| = ||0_\mathbb{K} \cdot 0_V|| = 0_\mathbb{K} \cdot ||0_V|| = 0$. Eine Norm nimmt also auf V nur reelle nicht-negative Werte an, und ist genau dann gleich 0, wenn der Vektor der Nullvektor ist.

Beispiel 23.3.

(a) Jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt, also jeder euklidische oder unitäre Raum, ist mit der Vorschrift $||x|| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$ ein normierter Raum — dies haben wir in Satz 21.20 bewiesen. Wenn wir nichts anderes angeben, werden wir in Zukunft jeden Vektorraum mit Skalarprodukt auf diese Art als normierten Raum ansehen.

Um Normen anschaulich darzustellen, zeichnet man in der Regel die sogenannte Einheitskugel $\{x \in V : ||x|| \le 1\}$, also die Menge aller Vektoren, die bezüglich dieser Norm die Länge höchstens 1 haben. Wir haben bei der Hauptachsentransformation in Beispiel 22.40 gesehen, dass diese Einheitskugel im Fall einer von einem Skalarprodukt bestimmten Norm ein gedrehtes Ellipsoid mit Mittelpunkt im Ursprung ist. Im Fall eines reellen zweidimensionalen Vektorraums ist dies im Bild unten dargestellt.

Der wichtigste Fall ist natürlich $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenn wir nichts Gegenteiliges angeben, wollen wir $\mathbb{R}^n$ in Zukunft immer mit der hieraus resultierenden Norm

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

als normierten Raum betrachten. Man nennt dies die **euklidische Norm**. In diesem Fall ist die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}$ natürlich die „gewöhnliche" Kugel.

(b) Für $V = \mathbb{K}^n$ ist die **Maximumsnorm** definiert als

$$||x|| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

In der Tat ist dies eine Norm: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.1 sind offensichtlich, und die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der in $\mathbb{K}$, denn es ist

$$||x+y|| = |x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le ||x|| + ||y||,$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ einen Index bezeichnet, für den in $||x+y|| = \max\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\}$ das Maximum angenommen wird. Die zugehörige Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{K}^n : \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \le 1\} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x_i| \le 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

ist in diesem Fall ein achsenparalleler Würfel; er ist wieder im Bild unten eingezeichnet. Da wir in diesem Fall kein Ellipsoid erhalten, sehen wir also auch schon, dass die Maximumsnorm keine Norm sein kann, die von einem Skalarprodukt kommt — das Konzept eines normierten Raumes lässt also allgemeinere Normen zu als die, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben.

(c) Für $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir die **Summennorm** durch

$$||x|| = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

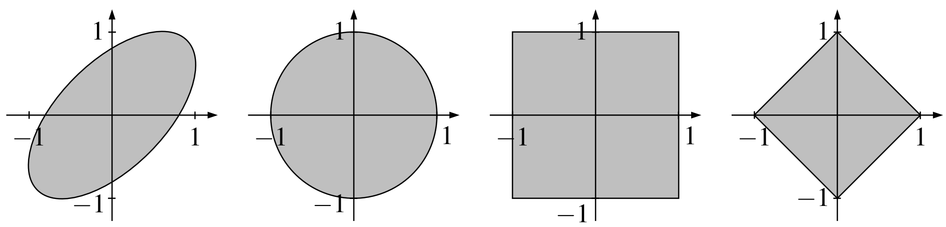
Auch hier sind die Bedingungen (a) und (b) in Definition 23.1 wieder offensichtlich, und die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$||x+y|| = |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \le |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = ||x|| + ||y||.$$

Die zugehörige Einheitskugel ist wieder im folgenden Bild dargestellt.

Die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der …

Norm zu einem allgemeinen Skalarprodukt | euklidischen Norm | Maximumsnorm | Summennorm



(d) Es sei wieder $V = \mathbb{K}^n$. Für eine reelle Zahl $p \ge 1$ kann man zeigen, dass durch

$$||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

eine Norm definiert wird, die sogenannte ***p*-Norm**. In der Tat sind die ersten beiden Eigenschaften von Definition 23.1 auch hier wieder klar, die Dreiecksungleichung ist jedoch etwas aufwändiger als für unsere bisher betrachteten Normen nachzurechnen. Da wir diese allgemeinen p-Normen in unserer Vorlesung nicht weiter benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis. Ihr könnt ihn z. B. in [Fo1, Kapitel 16, Satz 8] finden.

Wir erwähnen die p-Norm hier nur deshalb, weil sie eine Verallgemeinerung unserer oben betrachteten Normen ist und sich daraus auch deren übliche Bezeichnungsweise ableitet: Offensichtlich ist die 1-Norm gerade die Summennorm und die 2-Norm die euklidische Norm. Für $p \to \infty$ hingegen ergibt sich die Maximumsnorm: Ist nämlich $x \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor, für den ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Maximum in $||x|| = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ für $|x_1|$ angenommen wird, so ist

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} ||x||_p &= |x_1| \cdot \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}} \\ &= |x_1| \cdot \lim_{p\to\infty} \exp\left(\frac{1}{p} \cdot \underbrace{\log\left(1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}\right)}_{\text{beschränkt}}\right) \\ &= |x_1| \cdot \exp(0) \\ &= ||x||.\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{K}^n$ bezeichnet man daher ...

- die Summennorm mit $||x||_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$,
- die euklidische Norm mit $||x||_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$,
- die Maximumsnorm mit $||x||_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$.

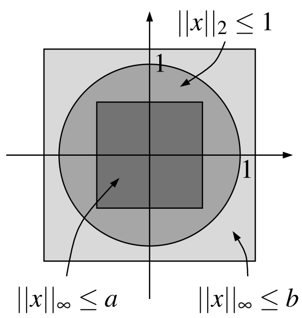
(e) Alle oben betrachteten Normen gibt es analog auch auf dem Vektorraum $C^0([a,b])$ aller stetigen reellen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$: So ist z. B. für eine solche Funktion f

$$||f||_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad ||f||_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}, \quad ||f||_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

(das Maximum existiert nach Satz 8.25, und die Normeigenschaften beweist man analog zu den Fällen oben bzw. zu Beispiel 21.15 (c)). Die Maximumsnorm $||f||_\infty$ ist dabei die, die wir in Aufgabe 8.43 bereits in einem etwas allgemeineren Fall als *Supremumsnorm* kennengelernt haben.

Zur Charakterisierung einer Norm haben wir in Beispiel 23.3 für einige konkrete Fälle die Einheitskugel $\{x \in V : ||x|| \le 1\}$ grafisch dargestellt. Eine Kugel $\{x \in V : ||x|| \le a\}$ mit einem anderen Radius $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist dann aufgrund der Linearitätseigenschaft aus Definition 23.1 (a) natürlich einfach nur eine entsprechend skalierte Version des gleichen Bildes.

Auch wenn die Kugeln zu verschiedenen Normen nicht gleich sind, sehen wir also schon, dass sie zumindest in den oben skizzierten Fällen nach einer Skalierung ineinander passen: Betrachten wir z. B. wie im Bild rechts die euklidische Norm und die Maximumsnorm in $\mathbb{R}^2$, so enthält die euklidische Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 \le 1\}$ eine Kugel $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_\infty \le a\}$ in der Maximumsnorm für ein geeignetes a, und liegt umgekehrt in einer Kugel $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_\infty \le b\}$ in der Maximumsnorm für ein geeignetes b. In der Tat können wir für diese Kugeln in diesem Fall beliebige Radien $a \le \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $b \ge 1$ wählen.



In Formeln bedeutet dies genau, dass wir für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Implikationskette

$$||x||_\infty \le a \quad \Rightarrow \quad ||x||_2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad ||x||_\infty \le b,$$

haben, oder äquivalent dazu die Ungleichung

$$a\,||x||_2 \le ||x||_\infty \le b\,||x||_2.$$

Wir werden später (z. B. in Lemma 23.15 und Bemerkung 23.16) noch sehen, dass dies dazu führt, dass sich die beiden betrachteten Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. Man definiert daher:

Definition 23.4 (Äquivalente Normen)**.** Zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\,||x||' \le ||x|| \le b\,||x||' \quad \text{für alle } x \in V.$$

Man prüft leicht nach, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V ist.

Wie man aufgrund des Bildes in Beispiel 23.3 schon vermuten kann, wollen wir nun zeigen, dass die Eigenschaft aus Definition 23.4 für zwei beliebige Normen auf $\mathbb{K}^n$ immer erfüllt ist — nur in unendlich-dimensionalen Vektorräumen kann diese Bedingung verletzt sein.

Satz 23.5. *Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind zueinander äquivalent.*

Beweis. Da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass eine beliebige Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{K}^n$ zur euklidischen Norm äquivalent ist, also dass es $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\,||x||_2 \le ||x|| \le b\,||x||_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

Wir zeigen zuerst die Existenz von b: Bezeichnen $e_1,\dots,e_n$ wie üblich die Einheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$, so gilt für alle $x = x_1e_1+\cdots+x_ne_n \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned}
||x|| &\le ||x_1e_1||+\cdots+||x_ne_n|| && \text{(Definition 23.1 (c))}\\
&= |x_1|\cdot||e_1||+\cdots+|x_n|\cdot||e_n|| && \text{(Definition 23.1 (a))}\\
&\le ||x||_2\cdot||e_1||+\cdots+||x||_2\cdot||e_n|| && \left(\text{wegen } |x_i| \le \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} = ||x||_2\right)\\
&= b\,||x||_2 && \text{mit } b := ||e_1||+\cdots+||e_n||.
\end{aligned}$$

Die Existenz von a zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis: Gäbe es keine solche Konstante, d. h. kein $a>0$ mit $||x||\,/\,||x||_2 \ge a$ für alle $x \ne 0$, so könnten wir eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ mit $||x^{(k)}||\,/\,||x^{(k)}||_2 \to 0$ für $k\to\infty$ finden (dabei haben wir die Folge mit einem oberen Index gekennzeichnet, da die unteren Indizes bereits für die Koordinaten eines Vektors in $\mathbb{K}^n$ stehen). Da Multiplizieren eines Vektors $x^{(k)}$ mit einem Skalar λ nach Definition 23.1 (a) beide Normen $||x^{(k)}||$ und $||x^{(k)}||_2$ mit λ multipliziert, können wir alle $x^{(k)}$ durch ihre euklidische Norm teilen, ohne etwas an dem Grenzwert $\lim_{k\to\infty}||x^{(k)}||\,/\,||x^{(k)}||_2 = 0$ zu ändern. Wir können also annehmen, dass

$$||x^{(k)}||_2 = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und damit dann

$$||x^{(k)}|| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \tag{2}$$

gilt. Weil alle $x^{(k)}$ dann in der euklidischen Einheitskugel liegen, sind die Koordinatenfolgen $(x_i^{(k)})_k$ für $i=1,\dots,n$ also beschränkt. Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß können wir damit nach evtl. Auswählen einer Teilfolge annehmen, dass alle diese Koordinatenfolgen konvergieren — genau genommen müssen wir aus der Folge $(x^{(k)})_k$ zuerst eine Teilfolge auswählen, so dass die zugehörige erste Koordinatenfolge konvergiert, daraus dann wieder eine Teilfolge, so dass die zweite Koordinatenfolge konvergiert usw. Wir erhalten also Grenzwerte

$$x_i := \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} \quad \text{für } i = 1,\dots,n, \tag{3}$$

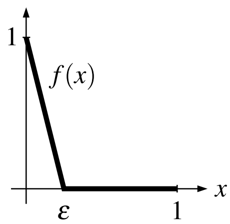
mit denen wir $x := x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ setzen. Einen Widerspruch erhalten wir nun, wenn wir die beiden Normen $||x||_2$ und $||x||$ dieses Vektors berechnen:

(a) Es ist
$$||x||_2 = \sqrt{\left|\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)}\right|^2 + \cdots + \left|\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}\right|^2} = \lim_{k\to\infty} ||x^{(k)}||_2 \overset{(1)}{=} 1$$
und damit natürlich $x \neq 0$.

(b) Andererseits ist aber nach der Dreiecksungleichung und der bereits bewiesenen Ungleichung $||x|| \leq b\,||x||_2$
$$||x|| \leq ||x^{(k)}|| + ||x - x^{(k)}|| \leq \underbrace{||x^{(k)}||}_{(A)} + b \cdot \underbrace{||x - x^{(k)}||_2}_{(B)}$$
für alle k. In dem Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert nun (A) wegen (2) gegen 0, und (B) ebenfalls wegen
$$\lim_{k\to\infty} ||x - x^{(k)}||_2 = \lim_{k\to\infty} \sqrt{|x_1 - x_1^{(k)}|^2 + \cdots + |x_n - x_n^{(k)}|^2} \overset{(3)}{=} 0.$$
Also muss $||x|| = 0$ gelten, was nach Definition 23.1 (b) im Widerspruch zu (a) aber $x = 0$ bedeuten würde.

Unsere Annahme war also falsch, d. h. es muss eine Konstante a wie in der Aussage des Satzes existieren. □ 56

Beispiel 23.6. Da jeder endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum nach Satz 14.22 isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$ ist, gilt Satz 23.5 natürlich genauso auch für beliebige endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für unendlich-dimensionale Räume ist diese Aussage jedoch falsch: Es sei z. B. V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit den beiden Normen
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \quad \text{und} \quad ||f||_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$
aus Beispiel 23.3 (e). Angenommen, es gäbe eine Konstante $b > 0$ mit $||f||_\infty \leq b\,||f||_1$ für alle $f \in V$. Mit $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{b}\}$ erhalten wir dann aber für die rechts abgebildete Funktion $f \in V$
$$||f||_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad ||f||_\infty = 1$$
und damit den Widerspruch $1 = ||f||_\infty \leq b\,||f||_1 = \frac{b\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}$. Also war unsere Annahme falsch, und es kann keine solche Konstante b geben.



Aufgabe 23.7 (Zeilensummennorm)**.** Für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ definieren wir die sogenannte **Zeilensummennorm** als
$$||A|| := \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| : i = 1, \ldots, m\right\}.$$
Man zeige:

(a) Die Zeilensummennorm ist eine Norm auf $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ (und damit nach Satz 23.5 natürlich zu jeder anderen Norm auf $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ äquivalent).

(b) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, \mathbb{K})$ gilt $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

(c) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $||Ax||_\infty \leq ||A|| \cdot ||x||_\infty$.

Die Zeilensummennorm von Matrizen ist in diesem Sinne also mit der Maximumsnorm verträglich; sie wird daher in der Regel auch mit $||A||_\infty$ bezeichnet.

Bevor wir zur angekündigten Anwendung des Längen- bzw. Abstandsbegriffs kommen, wollen wir das Konzept eines normierten Raumes noch etwas verallgemeinern. Eine recht große Einschränkung ist es in der Praxis nämlich, dass normierte Räume nach Definition stets Vektorräume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) sein müssen. Um Abstände zwischen Punkten sinnvoll definieren zu können, benötigt man allerdings keinerlei Vektorraumstruktur. Diese Idee führt zum folgenden Begriff eines metrischen Raumes, der lediglich den Abstand zweier Punkte, aber nicht die Länge eines Vektors definiert.

Definition 23.8 (Metriken und metrische Räume)**.** Es sei M eine Menge. Man nennt eine Abbildung $d\colon M\times M\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,y)\mapsto d(x,y)$ (die man sich als *Abstandsfunktion* zwischen zwei Punkten vorstellen sollte) eine **Metrik** auf M, wenn für alle $x,y,z\in M$ gilt:

(a) $d(x,y)=d(y,x)$ (**Symmetrie**);

(b) $d(x,y)=0$ genau dann wenn $x=y$;

(c) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (**Dreiecksungleichung**).

Eine Menge M zusammen mit einer Metrik d heißt **metrischer Raum** und wird manchmal auch als (M,d) geschrieben.

Lemma 23.9. *Jeder normierte Raum* $(V,||\cdot||)$ *ist mit der Abstandsfunktion* $d(x,y):=||x-y||$ *ein metrischer Raum.*

Wenn wir nichts anderes spezifizieren, werden wir in Zukunft daher jeden normierten Raum auf diese Art als metrischen Raum auffassen.

Beweis. Wir überprüfen die Eigenschaften aus Definition 23.8: Für alle $x,y,z\in V$ folgt nach Definition 23.1

- aus Teil (a): $d(x,y)=||x-y||=||(-1)(y-x)||=|-1|\cdot||y-x||=d(y,x)$;
- aus Teil (b): $d(x,y)=||x-y||=0$ genau dann wenn $x-y=0$, also $x=y$;
- aus Teil (c): $d(x,z)=||x-z||=||x-y+y-z||\leq||x-y||+||y-z||=d(x,y)+d(y,z)$. □

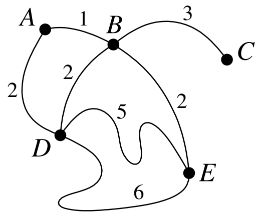
Beispiel 23.10.

(a) Ist (M,d) ein metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $X\subset M$ mit der eingeschränkten Metrik $d|_{X\times X}$ ebenfalls wieder ein metrischer Raum. Standardmäßig werden wir in Zukunft jede Teilmenge eines metrischen Raumes auf diese Art wieder als metrischen Raum betrachten. Fassen wir alle unsere Konventionen zusammen, so werden wir im Folgenden also jede Teilmenge $X\subset\mathbb{K}^n$ als metrischen Raum mit der *euklidischen Metrik*

$$d(x,y)=||x-y||_2=\sqrt{|x_1-y_1|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}$$

auffassen, sofern wir nichts Gegenteiliges angeben.

(b) Wir betrachten die „Landkarte“ mit 5 Städten A,B,C,D,E und Verbindungsstraßen wie im Bild rechts, wobei die Zahlen an den Straßen deren Längen angeben sollen — man nennt ein solches Diagramm auch einen (zusammenhängenden) *gewichteten Graphen*. Für die Menge $M=\{A,B,C,D,E\}$ und $x,y\in M$ sei nun $d(x,y)$ die Länge eines kürzesten Weges von x nach y. So ist z. B. $d(D,E)=4$, da von D nach E der Weg über B der kürzeste ist und eine Gesamtlänge von 4 hat.



Man sieht leicht ein, dass diese Abstandsfunktion d dann eine Metrik auf M definiert: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.8 sind offensichtlich, und (c) folgt aus der einfachen Tatsache, dass $d(x,y)+d(y,z)$ ja die Länge eines kürzesten Weges von x über y nach z ist und diese natürlich mindestens gleich der Länge $d(x,z)$ eines kürzesten Weges von x nach z ist, bei dem man nicht notwendig über y laufen muss.

(c) Auf jeder Menge M ist

$$d(x,y):=\begin{cases}0 & \text{für } x=y,\\ 1 & \text{für } x\neq y\end{cases}$$

offensichtlich eine Metrik, die sogenannte **diskrete Metrik**.

23.B Konvergenz in metrischen Räumen

Wie bereits angekündigt können wir nun analog zu Definition 5.1 Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen (und damit auch in normierten Räumen bzw. Vektorräumen mit Skalarprodukt) definieren.

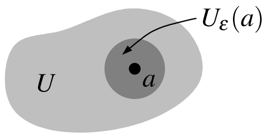
Definition 23.11 (Kugeln, Umgebungen und Grenzwerte)**.** Es seien M ein metrischer Raum und $a \in M$.

(a) Zu $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt

$$U_r(a) := \{x \in M : d(x,a) < r\} \quad \text{die } \textbf{offene Kugel}\text{, und}$$
$$K_r(a) := \{x \in M : d(x,a) \leq r\} \quad \text{die } \textbf{abgeschlossene Kugel}$$

um a mit Radius r.

(b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **Umgebung** von a, wenn es wie im Bild rechts ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$. Insbesondere ist $U_\varepsilon(a)$ also selbst eine Umgebung von a. Man nennt sie oft auch die **ε-Umgebung** von a.



(c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Dann heißt a **Grenzwert** von $(a_n)_n$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : d(a_n,a) < \varepsilon.$$

Wie im Fall von Folgen in $\mathbb{K}$ werden wir gleich in Lemma 23.13 sehen, dass ein solcher Grenzwert a eindeutig ist, sofern er existiert. Wir können ihn dann also *den* Grenzwert der Folge nennen und schreiben ihn wie gewohnt als $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Existiert dieser Grenzwert, so heißt die Folge $(a_n)_n$ **konvergent**, andernfalls **divergent**.

Bemerkung 23.12.

(a) Es gibt mehrere äquivalente Umformulierungen der obigen Grenzwertdefinition. Am nützlichsten ist vermutlich das Kriterium

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n,a) = 0,$$

das wegen der Positivität der Metrik unmittelbar durch Vergleich mit Definition 5.1 (b) folgt und den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ im metrischen Raum M damit direkt auf einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d(a_n,a)$ in $\mathbb{R}$ zurückführt. Eine andere äquivalente Formulierung von Definition 23.11 (c) mit Hilfe des Umgebungsbegriffs und der Notation „fast alle" für „alle bis auf endlich viele" ist offensichtlich genau wie in Bemerkung 5.2

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Dies kann man schließlich noch umformulieren als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{In jeder Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Liegen nämlich in jeder Umgebung fast alle Folgenglieder, so natürlich insbesondere auch in jeder ε-Umgebung. Enthält umgekehrt jede ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder, so auch jede Umgebung von a, da eine solche ja nach Definition noch eine ε-Umgebung von a enthält.

(b) Wendet man Definition 23.11 auf einen normierten Raum V an, so ist nach Lemma 23.9 also $d(x,y) = ||x-y||$. In diesem Fall ist demnach z. B. $U_r(a) = \{x \in V : ||x-a|| < r\}$, und eine Folge $(a_n)_n$ in V konvergiert genau dann gegen $a \in V$, wenn $\lim_{n\to\infty} ||a_n - a|| = 0$.

Lemma 23.13 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *In einem metrischen Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Würde eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum M gegen zwei Punkte $a \neq b$ konvergieren, so müsste mit $\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$ sowohl $d(a_n,a) < \varepsilon$ als auch $d(a_n,b) < \varepsilon$ für fast alle n gelten. Damit wäre nach der Dreiecksungleichung aber auch für fast alle n

$$d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a,b),$$

was ein Widerspruch ist. □

Beispiel 23.14. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$ für alle n.

(a) Versehen wir $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm, so konvergiert die Folge nach Bemerkung 23.12 (b) gegen $0 \in \mathbb{R}^2$, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} ||a_n - 0||_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0.$$

(b) Auch mit der Maximumsnorm aus Beispiel 23.3 (b) konvergiert die Folge gegen 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} ||a_n - 0||_\infty = \lim_{n\to\infty} \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(c) In der diskreten Metrik aus Beispiel 23.10 (c) konvergiert die Folge jedoch nicht gegen 0: Hier ist

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,$$

da ja $a_n \neq 0$ für alle n gilt. In der Tat ist in der diskreten Metrik $U_1(a) = \{a\}$ für alle a — und damit konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ in dieser Metrik genau dann gegen a, wenn fast alle Folgenglieder a_n gleich a sind.

Die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum hängt also im Allgemeinen von der gewählten Metrik ab. Wir wollen nun aber zeigen, dass dies bei äquivalenten Normen nicht der Fall ist: In diesem Fall spielt es wie bei den Beispielen 23.14 (a) und (b) keine Rolle, welche Norm wir verwenden — wir erhalten immer das gleiche Ergebnis. Diese Tatsache beruht auf der folgenden wichtigen Aussage.

Lemma 23.15. *Es seien $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ zwei äquivalente Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt für alle $a \in V$ und $U \subset V$*

$$U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } ||\cdot|| \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } ||\cdot||',$$

d. h. „die beiden Normen erzeugen den gleichen Umgebungsbegriff".

Insbesondere ist dies nach Satz 23.5 also in einem endlich erzeugten Vektorraum für zwei beliebige Normen der Fall.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $||x|| \leq b\,||x||'$ für alle $x \in V$. Im Folgenden bezeichnen wir die ε-Umgebung eines Punktes $a \in V$ bezüglich $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ mit $U_\varepsilon(a)$ bzw. $U'_\varepsilon(a)$.

Es sei nun U eine Umgebung von a bezüglich $||\cdot||$, d. h. es gilt $U_\varepsilon(a) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist aber auch $U'_{\varepsilon/b}(a) \subset U$, denn für alle $x \in U'_{\varepsilon/b}(a)$ gilt $||x-a|| \leq b\,||x-a||' < b \cdot \frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon$, also $x \in U_\varepsilon(a) \subset U$. Damit ist U auch eine Umgebung von a bezüglich $||\cdot||'$.

Die andere Richtung ergibt sich analog durch Vertauschen der Rollen der beiden Normen. □

Bemerkung 23.16 (Topologie)**.** Wir hatten in Abschnitt 23.A bereits erwähnt, dass sich äquivalente Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. In Lemma 23.15 haben wir nun ein erstes und sehr wichtiges Beispiel dafür gesehen: Der von ihnen erzeugte Umgebungsbegriff ist der gleiche.

Damit stimmen bei äquivalenten Normen natürlich auch alle Eigenschaften von Objekten überein, die sich allein mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definieren lassen. Derartige Eigenschaften, von denen wir im Folgenden noch viele kennenlernen werden, bezeichnet man als *topologische Eigenschaften*. Ein erstes Beispiel dafür ist die Folgenkonvergenz, denn nach Bemerkung 23.12 (a) konvergiert eine Folge genau dann gegen einen Punkt, wenn in jeder Umgebung dieses Punktes fast alle Folgenglieder liegen. Insbesondere können wir nach Satz 23.5 für die Betrachtung von topologischen Eigenschaften wie der Folgenkonvergenz in einem endlich erzeugten normierten Raum die gegebene Norm auch durch eine beliebige andere ersetzen. Wir werden dies im Folgenden oft tun und z. B. in $\mathbb{K}^n$ die Maximumsnorm statt der euklidischen verwenden, da sie in konkreten Rechnungen in vielen Fällen einfacher ist.

In der Tat gibt es eine weitere Verallgemeinerung metrischer Räume: die sogenannten *topologischen Räume*, die ihr in der Vorlesung „Einführung in die Topologie“ des zweiten Studienjahres kennenlernen könnt. In ihnen gibt es keinerlei Metrik, aber noch einen Umgebungsbegriff. Demnach kann man dort dann zwar keine Abstände mehr messen, aber dennoch alle topologischen Eigenschaften wie z. B. die Folgenkonvergenz definieren und untersuchen.

Wir wollen nun die uns bekannten Eigenschaften konvergenter Folgen in $\mathbb{K}$ auf den Fall normierter bzw. metrischer Räume übertragen. Dabei beginnen wir mit den Grenzwertsätzen aus Satz 5.13.

Satz 23.17 (**Grenzwertsätze** in normierten Räumen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Ferner sei $(\lambda_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Dann gilt:*

(a) $a_n + b_n \to a + b$ *und* $a_n - b_n \to a - b$;

(b) $\lambda_n a_n \to \lambda a$

(d. h. Grenzwerte vertauschen mit Vektoraddition, Subtraktion und Skalarmultiplikation).

Beweis. Die Beweise sind (bis auf das Ersetzen der Betragsstriche durch die Norm) wörtlich dieselben wie in Satz 5.13. □

Im normierten Raum $\mathbb{K}^n$ haben wir zusätzlich den Vorteil, dass man die Konvergenz von Folgen koordinatenweise überprüfen kann:

Lemma 23.18. *Eine Folge $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ konvergiert (bezüglich einer beliebigen Norm von $\mathbb{K}^n$) genau dann gegen $a \in \mathbb{K}^n$, wenn jede Koordinatenfolge $(a_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $i = 1,\dots,n$ in $\mathbb{K}$ gegen die i-te Koordinate a_i von a konvergiert.*

Beweis. Nach Bemerkung 23.16 können wir zum Beweis die Summennorm aus Beispiel 23.3 (c) verwenden. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a \;&\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} ||a^{(k)} - a||_1 = 0 && \text{(Bemerkung 23.12 (b))}\\
&\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} \left(|a_1^{(k)} - a_1| + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|\right) = 0\\
&\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i \ \text{ für alle } i = 1,\dots,n,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Äquivalenz die Richtung „$\Leftarrow$“ die üblichen Grenzwertsätze in $\mathbb{R}$ sind, und die Richtung „$\Rightarrow$“ aus der Ungleichung $|a_i^{(k)} - a_i| \le |a_1^{(k)} - a_1| + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|$ folgt. □

Als Nächstes wollen wir die aus Lemma 5.8 bekannte Aussage übertragen, dass konvergente Folgen beschränkt sind. Dazu müssen wir allerdings zunächst den Begriff der Beschränktheit einer Menge oder einer Folge auf metrische Räume übertragen.

Definition 23.19 (Beschränkte Mengen und Folgen)**.** Es sei M ein metrischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **beschränkt**, wenn sie in einer abgeschlossenen Kugel enthalten ist, also wenn es ein $a \in M$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $X \subset K_r(a)$, d. h. mit $d(x,a) \leq r$ für alle $x \in X$.

(b) Eine Folge in M heißt **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder in M beschränkt ist.

Bemerkung 23.20.

(a) Ist $X \subset M$ beschränkt, so gilt die Bedingung aus Definition 23.19 (a) sogar für alle $a \in M$: Sind nämlich $b \in M$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d(x,b) \leq r$ für alle $x \in X$, so gilt nach der Dreiecksungleichung für ein beliebiges $a \in M$ auch

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) \leq r + d(b,a) = R \qquad \text{für alle } x \in X,$$

wobei wir $R := r + d(b,a)$ gesetzt haben.

Insbesondere können wir in einem normierten Raum V also stets $a = 0$ wählen, und erhalten so die Aussage, dass eine Teilmenge $X \subset V$ genau dann beschränkt ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $||x|| \leq r$ für alle $x \in X$. Für den Fall $V = \mathbb{K}$ mit der gewöhnlichen Metrik stimmt
57 dies dann offensichtlich mit unserer alten Definition 4.21 (b) überein.

(b) Wie wir in Aufgabe 23.22 sehen werden, ist die Beschränktheit einer Menge in einem metrischen Raum keine topologische Eigenschaft im Sinne von 23.16. Dennoch stimmt sie für zwei äquivalente Normen $|| \cdot ||$ und $|| \cdot ||'$ auf einem Vektorraum V überein: Ist $||x|| \leq b||x||'$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $x \in V$, und ist $X \subset V$ beschränkt bezüglich $|| \cdot ||'$, d. h. gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $||x||' \leq r$ für alle $x \in X$, so ist dann auch $||x|| \leq b||x||' \leq br$ für alle $x \in X$, d. h. X ist auch beschränkt bezüglich $|| \cdot ||$.

Lemma 23.21. *In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

Beweis. Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Nach Bemerkung 23.12 (a) gilt dann $d(a_n,a) \to 0$ für $n \to \infty$. Nach Lemma 5.8 ist die konvergente reelle Folge $(d(a_n,a))_n$ also beschränkt, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d(a_n,a) \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch $(a_n)_n$ beschränkt. $\square$

Aufgabe 23.22. Für $x,y \in \mathbb{R}^2$ seien

$$d_1(x,y) := \begin{cases} ||x||_2 + ||y||_2 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_2(x,y) := \min(||x-y||_2, 1).$$

(a) Zeige, dass d_1 und d_2 Metriken auf $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Skizziere die qualitativ verschiedenen Fälle, wie abgeschlossene Kugeln bezüglich dieser beiden Metriken aussehen können.

(c) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_1 genau dann beschränkt, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt ist. Für d_2 gilt dies jedoch nicht.

(d) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_2 genau dann eine Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^2$, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik eine Umgebung von a ist. Für d_1 gilt dies jedoch nicht.

Insbesondere zeigt d_2 also, dass Beschränktheit kein topologischer Begriff ist: Diese Metrik liefert die gleichen Umgebungen wie die euklidische Metrik, aber nicht die gleichen beschränkten Mengen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.24 verallgemeinern, das immer dann für den Nachweis der Konvergenz einer Folge benötigt wird, wenn ihr Grenzwert vorher noch nicht bekannt ist. Die Definition einer Cauchyfolge kann dabei unmittelbar aus Definition 6.22 übertragen werden.

Definition 23.23 (Cauchyfolgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum M heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m,n \geq n_0 : d(a_m,a_n) < \varepsilon.$$

Bemerkung 23.24.

(a) Genau wie die Beschränktheit von Mengen bzw. Folgen ist auch das Konzept von Cauchyfolgen keine topologische Eigenschaft. Mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 23.20 (b) stimmt es für äquivalente Normen aber dennoch überein.

(b) Wie in Bemerkung 6.23 zeigt man auch in beliebigen metrischen Räumen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Im Gegensatz zu Satz 6.24 gilt die Umkehrung in allgemeinen metrischen Räumen jedoch nicht, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

Beispiel 23.25 (Cauchyfolgen müssen nicht konvergieren)**.** Es seien $M = \mathbb{R}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ die Folge in M mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle n. Dann ist $(a_n)_n$ nach Satz 6.24 eine Cauchyfolge, da sie in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert. Ihr Grenzwert liegt jedoch nicht in M, und damit ist die Folge in M nicht konvergent.

Da es in der Regel sehr wichtig ist zu wissen, ob Cauchyfolgen stets konvergieren und man somit die Konvergenz von Folgen mit dem Cauchy-Kriterium überprüfen kann, haben derartige metrische Räume einen besonderen Namen.

Definition 23.26 (Vollständige Räume)**.**

(a) Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert (und die Cauchyfolgen nach Bemerkung 23.24 (b) damit genau die konvergenten Folgen sind).

(b) Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Satz 23.27. *$\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum (d. h. jede Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{K}^n$).*

Beweis. Nach Bemerkung 23.16 und 23.24 (a) können wir die Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$ verwenden. Es sei nun $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}^n$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $||a^{(k)} - a^{(l)}||_\infty < \varepsilon$, und damit auch $|a_i^{(k)} - a_i^{(l)}| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq k_0$ und $i = 1, \dots, n$ gilt. Also sind die Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ für alle i Cauchyfolgen in $\mathbb{K}$ und damit nach Satz 6.24 konvergent gegen gewisse $a_i \in \mathbb{K}$. Nach Lemma 23.18 konvergiert dann aber auch die ursprüngliche Folge $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen den Vektor a mit Koordinaten $a_1, \dots, a_n$. □

Mit $\mathbb{K}^n$ ist dann natürlich auch jeder endlich-dimensionale normierte Raum ein Banachraum. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies für unendlich-dimensionale Räume im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 23.28 (Beispiel für einen nicht vollständigen normierten Raum)**.** Es sei V der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige:

(a) $(V, ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) $(V, ||\cdot||_2)$ ist kein Banachraum.

Aufgabe 23.29. Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.

(a) Zeige, dass der Grenzwert $\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ existiert.

(b) Berechne e^A für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$.

(c) Zeige, dass im Allgemeinen *nicht* $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B$ gilt.

23.C Offene und abgeschlossene Mengen

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun noch einige wichtige topologische Eigenschaften einführen. Die ersten von ihnen sind die einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge, die eine direkte Verallgemeinerung der offenen und abgeschlossenen Intervalle bzw. Kugeln aus Notation 4.16 und Definition 23.11 (a) sind und anschaulich ausdrücken, ob eine Menge ihre Randpunkte mit enthält (siehe auch Folgerung 23.39).

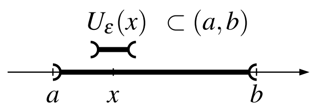
Definition 23.30 (Offene und abgeschlossene Mengen)**.** Es sei M ein metrischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen**, wenn sie eine Umgebung von jedem ihrer Punkte ist, also wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$.

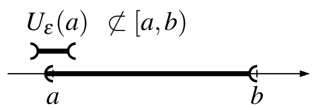
(b) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen**, wenn $M \backslash A$ offen ist, also wenn es zu jedem $a \in M\backslash A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset M\backslash A$. Man bezeichnet die Menge $M\backslash A$ oft als das **Komplement** von A in M — muss dabei aber aufpassen, dass dies natürlich nicht mit der Definition 15.7 eines Komplements von Unterräumen übereinstimmt.

Beispiel 23.31.

(a) In $\mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik) sind offene Intervalle (a,b) offen im Sinne von Definition 23.30: Um jeden Punkt x eines solchen Intervalls finden wir eine ε-Umgebung (nämlich für ein beliebiges $\varepsilon \leq \min\{x-a, b-x\}$), die ganz in (a,b) liegt. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty,b)$ und (a,∞) offen — in der Literatur werden sie daher im Gegensatz zu unserer Konvention in Notation 4.16 (a) manchmal auch zu den offenen Intervallen gezählt. Vereinigungen solcher Intervalle wie z. B. $(0,1) \cup (2,\infty)$ sind aus dem gleichen Grund ebenfalls offen. Dagegen sind die Intervalle $[a,b)$, $(a,b]$ und $[a,b]$ aufgrund der enthaltenen Randpunkte nicht offen, da es hier um die Punkte $x = a$ bzw. $x = b$, die innerhalb des Intervalls liegen, keine solche ε-Umgebung innerhalb des Intervalls mehr gibt.



(a,b) ist offen



$[a,b)$ ist nicht offen

(b) Wiederum in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ abgeschlossen, da ihre Komplemente $\mathbb{R}\backslash[a,b] = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ nach (a) offen sind. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty,b]$ und $[a,\infty)$ abgeschlossen, nicht aber die anderen Intervalltypen wie z. B. (a,b), $(a,b]$ oder (a,∞). Wie bei den offenen Intervallen werden die uneigentlichen Intervalle $(-\infty,b]$ und $[a,\infty)$ in manchen Büchern daher auch zu den abgeschlossenen Intervallen gezählt — für die beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ ist dann der Name „*kompaktes Intervall*" üblich (siehe Beispiel 23.51).

Insbesondere sehen wir an diesem Beispiel schon, dass „abgeschlossen" nicht das Gegenteil von „offen" ist: Das Intervall $[a,b)$ ist z. B. weder offen noch abgeschlossen, da es einen Randpunkt a enthält und den anderen b nicht.

(c) In jedem metrischen Raum M sind die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum M trivialerweise offen, und damit gleichzeitig auch abgeschlossen.

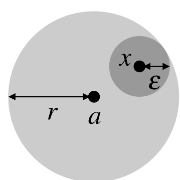
(d) In jedem metrischen Raum sind die offenen Kugeln $U_r(a)$ aus Definition 23.11 (a) offen: Ist $x \in U_r(a)$ beliebig, also $d(x,a) < r$, so ist wie im Bild rechts $U_\varepsilon(x) \subset U_r(a)$ mit $\varepsilon := r - d(x,a)$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r.$$

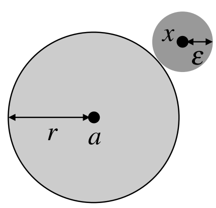
Also ist $U_r(a)$ offen. Analog sieht man, dass jede abgeschlossene Kugel $K_r(a)$ abgeschlossen ist: Ist $x \in M\backslash K_r(a)$, also $d(x,a) > r$, so ist $U_\varepsilon(x) \subset M\backslash K_r(a)$ mit $\varepsilon := d(x,a) - r > 0$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nun

$$d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \varepsilon = r,$$

d. h. $K_r(a)$ ist abgeschlossen. Insbesondere sind also einpunktige Mengen $\{a\} = K_0(a)$ als abgeschlossene Kugeln vom Radius 0 stets abgeschlossen.



$U_r(a)$



$K_r(a)$

(e) Da in jeder ε-Umgebung eines beliebigen Punktes von $\mathbb{R}$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, ist weder die Menge der rationalen noch die der irrationalen Zahlen offen in $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Die wichtigsten Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen sind die folgenden:

Lemma 23.32 (Durchschnitte und Vereinigungen offener und abgeschlossener Mengen)**.** *In jedem metrischen Raum gilt:*

(a) *Durchschnitte endlich vieler offener Mengen sind offen.*

(b) *Vereinigungen beliebig vieler (also auch unendlich vieler) offener Mengen sind offen.*

(c) *Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

(d) *Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. Es sei M ein metrischer Raum.

(a) Es seien $U_1,\dots,U_n \subset M$ offen und $a \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist $a \in U_i$ für alle $i = 1,\dots,n$. Da U_i offen ist, gibt es zu jedem i ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ ist dann also $U_\varepsilon(a) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$ eine Umgebung von a, die ganz in $U_1 \cap \dots \cap U_n$ liegt. Also ist $U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen.

(b) Es seien I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ für alle $i \in I$ offen. Ist nun $a \in \bigcup_{i\in I} U_i$, so ist also $a \in U_j$ für ein $j \in I$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset U_j \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Also ist $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

(c) Dies folgt nun durch Komplementbildung aus (a): sind $A_1,\dots,A_n \subset M$ abgeschlossen, also $M\backslash A_1,\dots,M\backslash A_n$ offen, so ist nach (a) auch
$$(M\backslash A_1) \cap \dots \cap (M\backslash A_n) = M\backslash(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$
offen, und $A_1 \cup \dots \cup A_n$ damit abgeschlossen.

(d) ergibt sich analog aus (b): Sind $A_i \subset M$ abgeschlossen für alle i in einer Indexmenge I, also $M\backslash A_i$ offen, so ist nach (b) auch
$$\bigcup_{i\in I}(M\backslash A_i) = M\backslash \bigcap_{i\in I} A_i$$
offen, d. h. $\bigcap_{i\in I} A_i$ ist abgeschlossen. □

Bemerkung 23.33. Die Beschränkung auf endlich viele Mengen in Lemma 23.32 (a) und (c) ist wesentlich: Nach Beispiel 23.31 (d) ist in einem metrischen Raum M ja jede einpunktige Menge $\{a\}$ mit $a \in M$ abgeschlossen. Wären nun beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, so müsste dann ja jede Teilmenge $A \subset M$ (die ja immer Vereinigung aller ihrer Punkte ist) abgeschlossen sein — was im Allgemeinen offensichtlich falsch ist.

Aufgabe 23.34.

(a) Es sei $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subset \mathbb{R}$, aufgefasst als metrischer Raum mit der euklidischen Metrik. Gib alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen dieses metrischen Raumes M an.

(b) Es sei $X \subset M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes M. Nach Beispiel 23.10 (a) ist dann auch X ein metrischer Raum mit der eingeschränkten Metrik.

Zeige, dass eine Menge $U \subset X$ genau dann offen in diesem metrischen Raum X ist, wenn es eine im metrischen Raum M offene Teilmenge $V \subset M$ gibt mit $U = V \cap X$.

Zum besseren Verständnis offener und abgeschlossener Mengen wollen wir jetzt noch das Konzept der Randpunkte exakt einführen, das wir oben ja schon zur Veranschaulichung dieser Begriffe verwendet haben.

Definition 23.35 (Randpunkte)**.** Es sei X eine Teilmenge eines metrischen Raumes M.

(a) Ein Punkt $a \in M$ heißt **Randpunkt** von X, wenn es in jeder Umgebung von a sowohl einen Punkt aus X als auch einen Punkt aus dem Komplement $M \backslash X$ gibt. Die Menge aller Randpunkte von X heißt der **Rand** von X und wird mit ∂X bezeichnet.

(b) Die Menge $\overline{X} := X \cup \partial X$ der gegebenen Menge zusammen mit ihren Randpunkten heißt der **Abschluss** von X, die Punkte in $\overline{X}$ nennt man **Berührpunkte** von X. Wir werden in Lemma 23.38 sehen, dass $\overline{X}$ in der Tat abgeschlossen ist.

(c) Die Menge $\mathring{X} := X \backslash \partial X$ der gegebenen Menge ohne ihre Randpunkte heißt das **Innere** von X, die Punkte in $\mathring{X}$ nennt man **innere Punkte** von X. Wir werden in Lemma 23.38 sehen, dass $\mathring{X}$ in der Tat offen ist.

(d) Ein Punkt $a \in M$ heißt **Häufungspunkt** von X, wenn es in jeder Umgebung von a einen Punkt in $X \backslash \{a\}$ gibt. Man nennt $a \in X$ einen **isolierten Punkt** von X, wenn es eine Umgebung von a gibt, die keine weiteren Punkte aus X enthält.

Bemerkung 23.36.

(a) Nach Definition 23.35 (a) ist unmittelbar klar, dass für jede Teilmenge X eines metrischen Raumes M die Beziehung $\partial(M \backslash X) = \partial X$ gilt. Damit ist auch

$$(M \backslash X)^\circ = (M \backslash X) \backslash \partial(M \backslash X) = (M \backslash X) \backslash \partial X = M \backslash \overline{X}.$$

Genauso zeigt man $\overline{M \backslash X} = M \backslash \mathring{X}$. Abschluss und Inneres werden in diesem Sinne also durch Komplementbildung vertauscht.

(b) Es gilt $\overline{X} \backslash \mathring{X} = \partial X$, da die linke Menge $(X \cup \partial X) \backslash (X \backslash \partial X)$ aus ∂X entsteht, indem man die Punkte von $X \backslash \partial X$ zunächst hinzufügt und dann wieder wegnimmt.

(c) Man kann den Abschluss $\overline{X} = X \cup \partial X$ einer Menge X äquivalent auch so charakterisieren, dass ein Punkt $a \in M$ genau dann in $\overline{X}$ liegt, wenn sich in jeder Umgebung von a ein Punkt von X befindet — denn dies schließt offensichtlich alle Punkte von X ein, und ist außerdem für ein $a \notin X$ nach Definition 23.35 (a) genau dann erfüllt, wenn $a \in \partial X$ ist. Der Begriff des Abschlusses stimmt daher im Fall $M = \mathbb{K}$ mit dem in Definition 8.1 überein. Dasselbe gilt für den Begriff des isolierten Punktes, den wir im Fall $M = \mathbb{K}$ bereits in Definition 10.1 betrachtet hatten.

Beispiel 23.37. Wir betrachten den metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik).

(a) Der Rand eines halboffenen Intervalls $X = [a,b)$ ist offensichtlich gerade $\partial X = \{a,b\}$. Damit ist $\overline{X} = [a,b]$ und $\mathring{X} = (a,b)$. Jeder Punkt in $[a,b]$ ist ein Häufungspunkt von X; es gibt keine isolierten Punkte in X.

(b) In der Menge $X = \mathbb{Z}$ ist jeder Punkt von X sowohl Randpunkt als auch isolierter Punkt von X. Es ist also $\partial X = \mathbb{Z}$ und damit $\overline{X} = \mathbb{Z}$ sowie $\mathring{X} = \emptyset$. Es gibt keine Häufungspunkte von X.

(c) Mit der gleichen Begründung wie in Beispiel 23.31 (e) ist in $M = \mathbb{R}$ der Rand der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen der gesamte Raum $\mathbb{R}$ und damit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Jede reelle Zahl ist
58 ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

Wir wollen nun zeigen, dass die in Definition 23.35 eingeführten Mengen wie erwartet offen bzw. abgeschlossen sind:

Lemma 23.38 (Eigenschaften des Randes)**.** *Für jede Teilmenge X in einem metrischen Raum M gilt:*

(a) *$\mathring{X}$ ist offen;*

(b) *$\overline{X}$ ist abgeschlossen;*

(c) *∂X ist abgeschlossen.*

Beweis.

(a) Es sei $a \in \mathring{X} = X \backslash \partial X$. Da a nicht in ∂X liegt, gibt es eine Umgebung U von a, die entweder ganz in X oder ganz in $M \backslash X$ enthalten ist. Wegen $a \in U$ und $a \in X$ ist $U \subset M \backslash X$ aber unmöglich, d. h. es muss $U \subset X$ gelten.

Nach Definition 23.11 (b) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $U = U_\varepsilon(a)$ eine ε-Umgebung von a und damit nach Beispiel 23.31 (d) offen ist. Damit ist die Umgebung U nach Definition 23.30 (a) aber auch von jedem ihrer Punkte eine Umgebung, die ganz in X liegt. Also ist kein Punkt von U ein Randpunkt von X, d. h. U ist eine Umgebung von a, die ganz in $X \backslash \partial X = \mathring{X}$ liegt. Damit ist $\mathring{X}$ offen.

(b) Mit Bemerkung 23.36 (a) ist $M \backslash \overline{X} = (M \backslash X)^\circ$. Diese Menge ist aber nach (a) offen, und damit ist $\overline{X}$ abgeschlossen.

(c) Nach Bemerkung 23.36 (b) ist

$$\partial X = \overline{X} \backslash \mathring{X} = \overline{X} \cap (M \backslash \mathring{X}).$$

Da $\overline{X}$ und $M \backslash \mathring{X}$ nach (b) bzw. (a) abgeschlossen sind, ist ∂X nach Lemma 23.32 (d) als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen also ebenfalls abgeschlossen. □

Wir erhalten aus diesem Lemma die folgende anschauliche Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen:

Folgerung 23.39. *Eine Teilmenge X eines metrischen Raumes M ist …*

(a) *… genau dann offen, wenn $\mathring{X} = X$ ist (also wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält);*

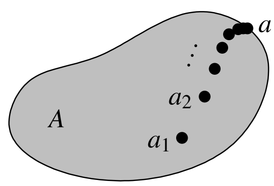
(b) *… genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{X} = X$ ist (also wenn sie alle ihre Randpunkte enthält).*

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$“ folgt für beide Fälle unmittelbar aus Lemma 23.38. Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist ebenfalls einfach: Ist X im Fall (a) offen, so ist diese Menge für jeden ihrer Punkte eine Umgebung, die ganz in X liegt — und das heißt nach Definition genau, dass kein Punkt von X ein Randpunkt von X ist, also $\mathring{X} = X$ gilt. Den Fall (b) führen wir durch Komplementbildung auf (a) zurück: Ist X abgeschlossen, also $M \backslash X$ offen, so haben wir gerade gezeigt, dass

$$M \backslash \overline{X} \overset{23.36\,(a)}{=} (M \backslash X)^\circ = M \backslash X$$

und damit $\overline{X} = X$ gilt. □

Diese Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch ihre Randpunkte lässt sich auch gut mit Hilfe von Grenzwerten von Folgen interpretieren. Haben wir nämlich eine konvergente Folge $(a_n)_n$, deren Glieder in einer Teilmenge A eines metrischen Raumes liegen, so kann der Grenzwert dieser Folge anschaulich nur in A oder wie im Bild rechts auf dem Rand von A, also letztlich in $\overline{A}$ liegen. Damit sollte A also genau dann abgeschlossen sein, wenn dieser Grenzwert in jedem Fall wieder in A liegt. Dies besagt der folgende Satz.



Satz 23.40 (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)**.** *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist genau dann abgeschlossen, wenn zu jeder konvergenten Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in A$ für (fast) alle n ihr Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ ebenfalls in A liegt. (Man sagt in diesem Fall auch, dass A „abgeschlossen unter Grenzwertbildung“ ist.)*

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Es seien $A \subset M$ abgeschlossen und $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, deren Glieder fast alle in A liegen. Angenommen, der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ läge in der offenen Menge $M \backslash A$. Dann wäre $M \backslash A$ nach Definition 23.30 (a) eine Umgebung von a, und damit müssten nach

Bemerkung 23.12 fast alle a_n in $M\backslash A$ liegen — im Widerspruch dazu, dass bereits fast alle a_n in A liegen. Also war unsere Annahme falsch, und es gilt $a \in A$.

„$\Leftarrow$" Die Menge A sei nun abgeschlossen unter Grenzwertbildung. Angenommen, A wäre nicht abgeschlossen, also $M\backslash A$ nicht offen. Dann gäbe es einen Punkt $a \in M\backslash A$, um den keine ε-Umgebung vollständig in $M\backslash A$ liegt. Wir können also für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einen Punkt a_n in der $\frac{1}{n}$-Umgebung von a wählen, der in A liegt. Wegen

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

ist $(a_n)_n$ dann im Widerspruch zur Annahme aber nach Bemerkung 23.12 eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $a \notin A$. Also ist A abgeschlossen. □

Folgerung 23.41 (Vollständigkeit von Teilmengen)**.** *Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann selbst wieder vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei A eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes M. Nach Definition 23.26 (a) ist A genau dann vollständig, wenn jede Cauchyfolge in A einen Grenzwert in A hat. Da M vollständig ist, konvergiert jede solche Cauchyfolge aber in jedem Fall mit einem Grenzwert in M. Also ist A genau dann vollständig, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge mit Folgengliedern in A ebenfalls in A liegt, nach Satz 23.40 also genau dann wenn A abgeschlossen ist. □

Aufgabe 23.42. Man zeige:

(a) Die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 + 1\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$.

(b) Sind $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

(c) Für $n \geq 2$ ist die Menge aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen weder offen noch abgeschlossen in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

Aufgabe 23.43. Es seien A und B zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Man zeige:

(a) Ist $A \subset B$, so auch $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Es ist stets $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Gilt hier im Allgemeinen auch die Gleichheit?

Aufgabe 23.44. In einem metrischen Raum M betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$. Man zeige:

(a) Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 23.45 (Häufungspunkte von Folgen und Mengen)**.** Es seien M ein metrischer Raum, $a \in M$ und $X \subset M$. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) a ist ein Häufungspunkt von X.

(b) Es gibt eine Folge in X, die nirgends den Wert a annimmt, und die a als Häufungspunkt hat.

(c) Es gibt eine Folge in X, die nirgends den Wert a annimmt, und die gegen a konvergiert.

(d) $a \in \overline{X\backslash\{a\}}$.

Die Äquivalenz „(a) $\Leftrightarrow$ (b)" stellt also insbesondere eine Beziehung zwischen den Begriffen des Häufungspunktes einer Folge (Definition 5.17 (c)) und einer Menge (Definition 23.35 (d)) her.

Aufgabe 23.46 (Abgeschlossenheit von Untervektorräumen)**.** Man zeige:

(a) Jeder Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen.

(b) Ein Untervektorraum U in einem beliebigen normierten Vektorraum V muss nicht notwendig abgeschlossen sein.

Aufgabe 23.47 (Ein topologisches Spiel)**.** Wir starten mit einer gegebenen Teilmenge X eines metrischen Raumes M. Ausgehend von dieser einen Teilmenge dürfen wir jetzt neue Teilmengen von M bilden, indem wir von X oder bereits vorher konstruierten Mengen entweder den Abschluss oder das Innere bilden. Starten wir z. B. im metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ mit der Teilmenge $X = \{0\} \cup (1,2]$, so ist deren Inneres gleich $(1,2)$, und davon wieder der Abschluss gleich $[1,2]$. Außerdem ist der Abschluss von X gleich $\{0\} \cup [1,2]$. Man überprüft schnell, dass die Abschluss- oder Innerenbildung bei keiner dieser Mengen zu neuen Mengen führt. Ausgehend von der einen gewählten Menge X konnten wir hier also insgesamt vier verschiedene Mengen erzeugen.

Wie viele verschiedene Mengen kann man so bei geschickter Wahl von M und X maximal erzeugen?

Hinweis: Untersuche zunächst, welche der folgenden Kästchen durch „$\subset$“ bzw. „$\supset$“ ersetzt werden können, um eine für alle X wahre Aussage zu erhalten, wobei wir zur Übersichtlichkeit der Notation A für den Abschluss und I für das Innere geschrieben haben. Die gesuchte Maximalzahl von Mengen lässt sich bereits in $M = \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik) für ein geeignetes $X \subset \mathbb{R}$ realisieren.

(a) $IA(X) \,\square\, X$ und $AI(X) \,\square\, X$;

(b) $IAI(X) \,\square\, I(X)$ und $AIA(X) \,\square\, A(X)$;

(c) $IAIA(X) \,\square\, IA(X)$ und $AIAI(X) \,\square\, AI(X)$.

Falls ihr noch weiter über diese Aufgabe nachdenken wollt: Wie viele Mengen kann man maximal aus einer gegebenen Menge X durch Abschluss- und Komplementbildung erzeugen?

23.D Kompaktheit

In Kapitel 8 haben wir einige wichtige Eigenschaften reeller stetiger Funktionen kennengelernt, die auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definiert sind: Sie sind z. B. nach Satz 8.23 beschränkt, nehmen nach Satz 8.25 sogar ein Maximum und Minimum an, und sind nach Satz 8.36 auch gleichmäßig stetig. Alle diese Aussagen wären falsch, wenn wir den Definitionsbereich nur als beschränkt oder nur als abgeschlossen voraussetzen würden — wie die Beispiele der Funktionen $(0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ zeigen, die keine der drei genannten Eigenschaften erfüllen.

Für eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ ist diese Kombination von Beschränktheit und Abgeschlossenheit in der Praxis also sehr wichtig. Der Grund dafür ist aus den Beweisen der obigen Sätze ersichtlich: Sie alle benötigen zu einer gegebenen Folge in D die Existenz einer konvergenten Teilfolge mit Grenzwert in D. Ist nun D beschränkt, so existiert nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß zunächst einmal eine konvergente Teilfolge, und ist D abgeschlossen, so liegt der Grenzwert dieser Teilfolge nach Satz 23.40 dann auch in D.

Für die Verallgemeinerung dieser Aussagen auf normierte bzw. metrische Räume müssen wir daher die Existenz konvergenter Teilfolgen untersuchen. Wir übertragen dazu zunächst den Satz von Bolzano-Weierstraß ins Mehrdimensionale.

Satz 23.48 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach Bemerkung 23.16 können wir die Maximumsnorm verwenden. Ist dann eine Folge $(a^{(k)})_k$ beschränkt, gilt also $||a^{(k)}||_\infty \leq r$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, so ist damit auch $|a_i^{(k)}| \leq r$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$, d. h. es sind auch alle Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_k$ beschränkt.

Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{K}$ können wir also nach evtl. Auswählen einer Teilfolge annehmen, dass die erste Koordinatenfolge $(a_1^{(k)})_k$ von $(a^{(k)})_k$ konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge aus, so dass auch die zweite Koordinatenfolge konvergiert. Setzen wir dieses Verfahren fort, so haben wir nach n Schritten eine Teilfolge von $(a^{(k)})_k$ gefunden, von der jede Koordinatenfolge konvergiert und die nach Lemma 23.18 damit in $\mathbb{K}^n$ konvergent ist. □

Mit dieser Vorarbeit können wir jetzt den zentralen Begriff dieses Abschnitts definieren und untersuchen.

Definition 23.49 (Folgenkompaktheit)**.** Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M heißt **kompakt** bzw. **folgenkompakt**, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat.

Satz 23.50. *Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes M.*

(a) *Ist A kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.*

(b) *Im Fall $M = \mathbb{K}^n$ gilt auch die Umkehrung, d. h. dann ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis.

(a) Wäre A nicht beschränkt, dann gäbe es ein $a \in A$ und eine Folge $(a_k)_k$ in A mit $d(a_k, a) \geq k$ für alle k. Dann ist aber jede Teilfolge von $(a_k)_k$ unbeschränkt, also divergent nach Lemma 23.21. Damit kann A nicht kompakt sein.

Wäre A hingegen nicht abgeschlossen, so gäbe es nach Satz 23.40 eine konvergente Folge $(a_k)_k$ in A, deren Grenzwert a in $M \backslash A$ liegt. Dann konvergiert aber auch jede Teilfolge von $(a_k)_k$ gegen a, und damit also nicht gegen einen Punkt in A. Auch hier kann A also nicht kompakt sein.

(b) Die Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen. Jede Folge in A ist also zunächst beschränkt und besitzt damit nach dem Satz 23.48 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{K}^n$. Der Grenzwert dieser Teilfolge liegt nun wegen der Abgeschlossenheit von A nach Satz 23.40 ebenfalls in A. Also ist A kompakt. □

Beispiel 23.51. Von den Intervallen in $\mathbb{R}$ wie in Notation 4.16 (a) sind nach Satz 23.50 (b) genau die Intervalle der Form $[a, b]$ kompakt.

Wie bereits angekündigt werden wir später für stetige Funktionen auf kompakten Mengen ähnliche Eigenschaften zeigen, wie wir sie in Kapitel 8 für stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ bewiesen haben (siehe Abschnitt 24.B), z. B. dass solche Funktionen ein Maximum und Minimum annehmen. Das folgende Lemma ist eine kleine Vorbereitung dafür.

Lemma 23.52. *Jede kompakte, nicht leere Menge in $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und Minimum.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es offensichtlich, den Fall des Maximums zu betrachten. Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist A nach Satz 23.50 (a) beschränkt und besitzt damit wegen $A \neq \emptyset$ nach dem Supremumsaxiom (siehe Definition 4.27) ein Supremum $s := \sup A$. Angenommen, es wäre $s \notin A$. Da A kompakt und damit nach Satz 23.50 (a) abgeschlossen ist, gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \backslash A$, d. h. $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Dann wäre aber nicht nur s, sondern auch $s - \varepsilon$ eine obere Schranke für A — im Widerspruch zu $s = \sup A$.

Also war unsere Annahme falsch, und es ist $s \in A$, also $s = \max A$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch eine oft benötigte alternative Charakterisierung der Kompaktheit untersuchen. Da sie sich sehr von unserer ursprünglichen Definition 23.49 unterscheidet, geben wir ihr zunächst einen anderen Namen — wir werden aber in Satz 23.57 sehen, dass es sich zumindest für Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ um eine zur Folgenkompaktheit äquivalente Eigenschaft handelt.

Definition 23.53 (Überdeckungskompaktheit)**.** Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M heißt **überdeckungskompakt**, wenn gilt: Sind I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ offene Teilmengen mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es bereits endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Bemerkung 23.54.

(a) Man sagt auch, dass eine solche Familie offener Mengen, die in ihrer Vereinigung die Menge A enthalten, eine *offene Überdeckung* von A ist. Dementsprechend kann man die Bedingung der Überdeckungskompaktheit auch so formulieren: Jede offene Überdeckung von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung (also eine Überdeckung aus endlich vielen der gegebenen Mengen).

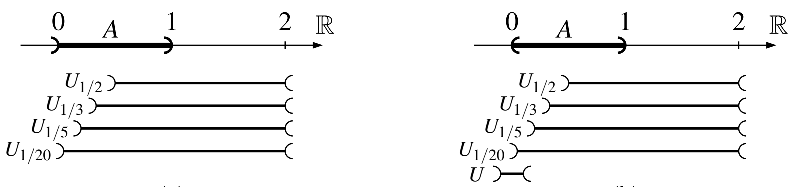
(b) Sowohl die Folgenkompaktheit aus Definition 23.49 als auch die Überdeckungskompaktheit aus Definition 23.53 sind offensichtlich topologische Eigenschaften im Sinne von Bemerkung 23.16.

Beispiel 23.55. Es sei $M = \mathbb{R}$.

(a) Betrachten wir das halboffene Intervall $A = (0,1]$, so bilden die unendlich vielen Intervalle $U_\varepsilon = (\varepsilon, 2)$ für alle $0 < \varepsilon < 1$, von denen wir im Bild unten links exemplarisch vier eingezeichnet haben, eine offene Überdeckung von A: Alle U_ε sind offen, und ihre Vereinigung umfasst die gesamte Menge A, da es zu jedem $x \in A = (0,1]$ noch ein ε gibt mit $0 < \varepsilon < x$, also mit $x \in U_\varepsilon$.

Treffen wir aus diesen offenen Mengen jedoch eine beliebige *endliche* Auswahl $U_{\varepsilon_1}, \dots, U_{\varepsilon_n}$, so überdecken diese endlich vielen Mengen sicher nicht mehr die ganze Menge A, denn es ist ja $U_{\varepsilon_1} \cup \cdots \cup U_{\varepsilon_n} = U_\varepsilon$ mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, und diese Vereinigung enthält z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{\varepsilon}{2} \in A$. (Im Bild unten links enthalten die vier dort ausgewählten Intervalle z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{1}{40} \in A$).

Wir finden in diesem Fall also keine endliche Teilüberdeckung zu der gegebenen offenen Überdeckung von A. Damit ist A nicht überdeckungskompakt.



(a) (b)

(b) Betrachten wir nun stattdessen das abgeschlossene Intervall $A = [0,1]$, so stellen wir zumindest fest, dass wir die Bedingung der Überdeckungskompaktheit dann nicht mehr so einfach widerlegen können: Die oben gewählten offenen Intervalle U_ε für $0 < \varepsilon < 1$ bilden nun keine Überdeckung von A mehr, da sie den Punkt $0 \in A$ nicht enthalten. Um daraus eine Überdeckung von A zu machen, müssten wir noch eine offene Menge U mit $0 \in U$ mit hinzu nehmen — z. B. $U = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ wie im Bild oben rechts, so dass wir die offene Überdeckung $U \cup \bigcup_{0<\varepsilon<1} U_\varepsilon$ von A erhalten. In diesem Fall ist es aber einfach, daraus eine endliche Teilüberdeckung von A auszuwählen, nämlich z. B. $U \cup U_{1/20} = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{20}, 2) \supset A$.

Beachte jedoch, dass wir mit diesem Argument noch nicht gezeigt haben, dass A überdeckungskompakt ist! Dazu hätten wir nämlich zu einer *beliebigen* offenen Überdeckung die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung beweisen müssen — während wir eben ja nur eine ganz spezielle offene Überdeckung betrachtet haben. In der Tat ist A aber überdeckungskompakt, wie wir gleich in Satz 23.57 sehen werden. 59

Analog zu Satz 23.50 (a) zeigen wir zunächst:

Lemma 23.56. *Jede überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Es sei A eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M.

A ist beschränkt: Da mit einem fest gewählten Punkt $a \in M$ die offenen Kugeln $U_r(a)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ offensichtlich den ganzen Raum M und damit auch A überdecken, können wir wegen der Überdeckungskompaktheit von A endlich viele $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit

$$A \subset U_{r_1}(a) \cup \dots \cup U_{r_n}(a) = U_r(a),$$

wobei $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Nach Definition 23.19 (a) ist A also beschränkt.

A ist abgeschlossen, d. h. $M \backslash A$ ist offen: Es sei $a \in M \backslash A$. Diesmal betrachten wir die offenen Mengen

$$V_r(a) := M \backslash K_r(a) = \{x \in M : d(x,a) > r\}$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$, die natürlich $M \backslash \{a\}$ und damit auch A überdecken. Da A überdeckungskompakt ist, gibt es also wieder endlich viele $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$A \subset V_{r_1}(a) \cup \dots \cup V_{r_n}(a) = V_r(a),$$

wobei $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Durch Komplementbildung erhalten wir daraus $U_r(a) \subset K_r(a) \subset M \backslash A$. Also ist $M \backslash A$ offen. $\square$

Satz 23.57 (Satz von Heine-Borel). *Eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir verwenden die Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$. Außerdem können wir ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen, da wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den Raum $\mathbb{C}^n$ einfach als $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen können.

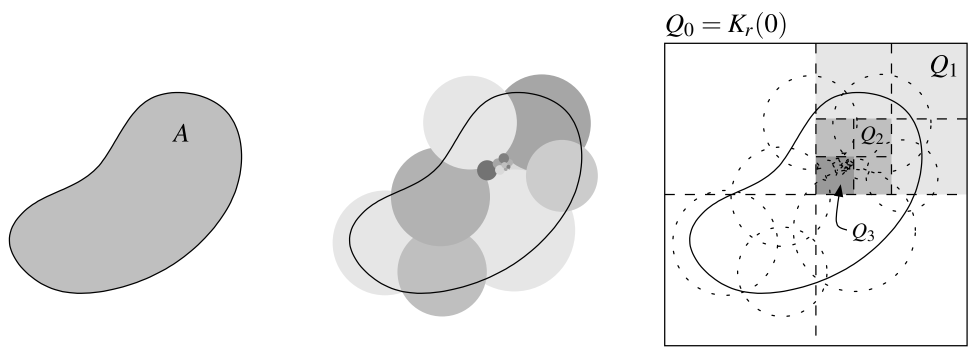
Wir haben in Lemma 23.56 bereits gesehen, dass eine überdeckungskompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen sein muss. Es sei nun also umgekehrt $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Wir zeigen mit einem Widerspruchsbeweis, dass A dann überdeckungskompakt ist.

Es sei also $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von A ohne endliche Teilüberdeckung. Im Bild unten in der Mitte ist dies dadurch angedeutet, dass die offenen Mengen der Überdeckung an einer Stelle sehr klein werden und damit sehr viele (bzw. unendlich viele) von ihnen benötigt werden, um A dort zu überdecken.

Als beschränkte Menge ist A in einer abgeschlossenen Kugel (in der Maximumsnorm), also in einem Würfel

$$K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_\infty \le r\} = [-r, r]^n$$

enthalten. Wir konstruieren nun rekursiv wie im Bild unten rechts eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von ineinander liegenden Würfeln mit Kantenlängen $2r \cdot 2^{-k}$, so dass $A \cap Q_k$ nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann:



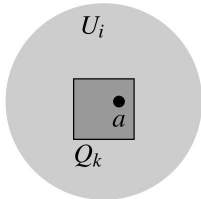
Die Menge A, … eine offene Überdeckung von A … und die Würfel Q_k

- Für $k = 0$ setzen wir $Q_0 := K_r(0)$; nach Voraussetzung kann $A \cap Q_0 = A$ nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden.

- Ist Q_k für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, teilen wir diesen Würfel an den Seitenmitten wie im Bild dargestellt in 2^n Teilwürfel mit jeweils halber Kantenlänge auf. Von diesen gibt es nun mindestens einen Teilwürfel, den wir dann Q_{k+1} nennen, für den der Schnitt mit A nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann — denn ansonsten könnte ja auch $A \cap Q_k$ durch endlich viele U_i überdeckt werden.

Anschaulich sollten die Würfel Q_k jetzt gegen einen Punkt a konvergieren, in dessen Nähe A nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann. Um diese Aussage exakt zu machen, wählen wir ein $a_k \in A \cap Q_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass also auch $a_k \in A \cap Q_l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq l$ gilt. Dann ist $(a_k)_k$ eine Cauchyfolge, denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ können wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit $2r \cdot 2^{-k_0} < \varepsilon$, und damit gilt dann $a_k, a_l \in Q_{k_0}$, also $||a_k - a_l||_\infty \leq 2r \cdot 2^{-k_0} < \varepsilon$ für alle $k, l \geq k_0$. Also existiert nach Satz 23.27 der Grenzwert $a := \lim_{k\to\infty} a_k$. Dieser muss nach Satz 23.40 sowohl in A als auch in allen Q_k liegen, da alle diese Mengen abgeschlossen sind und nach Konstruktion fast alle Folgenglieder enthalten.

Als Punkt in A muss a damit in einer der gegebenen Mengen U_i enthalten sein. Da U_i offen ist, enthält U_i nun aber noch eine ε-Kugel um a (in der Maximumsnorm). Wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit $2r \cdot 2^{-k} < \varepsilon$, so liegt der Würfel Q_k dann wie im Bild rechts ebenfalls vollständig in U_i. Damit wird aber Q_k und damit auch $A \cap Q_k$ bereits durch die eine Menge U_i überdeckt — im Widerspruch zur Annahme, dass dies nicht einmal mit endlich vielen der gegebenen offenen Mengen möglich ist.



Dieser Widerspruch zeigt, dass A überdeckungskompakt sein muss. □

Bemerkung 23.58. Nach Satz 23.50 (b) und 23.57 stimmen die Begriffe der Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit für Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ also überein. Man kann zeigen, dass diese Äquivalenz sogar in beliebigen metrischen Räumen gilt [M, Satz 39.30] — für alle in dieser Vorlesung betrachteten Räume sind diese beiden Begriffe also völlig gleichwertig. In der Tat wird der Begriff der Kompaktheit in den meisten Büchern über die Überdeckungskompaktheit definiert. Wir haben uns hier für die Definition über die Folgenkompaktheit entschieden, da dies wohl das deutlich anschaulichere Konzept ist.

Die Äquivalenz der Kompaktheit zur Beschränktheit und Abgeschlossenheit ist dagegen zwar gemäß Satz 23.50 (b) (bzw. 23.57) für Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ und damit wie üblich in beliebigen endlich erzeugten normierten Räumen richtig, im Allgemeinen jedoch falsch. In der Tat kann man sogar zeigen, dass diese Aussage in *jedem* nicht endlich erzeugten normierten Raum falsch ist, da in diesen Fällen bereits die (abgeschlossene) Einheitskugel $K_1(0)$ zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt ist. Das Studium solcher nicht endlich erzeugten normierten Räume — hauptsächlich von Räumen reellwertiger Funktionen mit bestimmten Eigenschaften — ist der Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ des zweiten Studienjahres. Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass in solchen allgemeinen normierten Räumen zwar viele Sätze noch genauso gelten wie im endlich erzeugten Fall, andererseits aber an entscheidenden Stellen auch große Unterschiede bestehen.

Aufgabe 23.59. Es seien A und K zwei Teilmengen eines metrischen Raumes M. Man zeige:

(a) Ist A abgeschlossen und K folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.

(b) Ist A abgeschlossen und K überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

Die in Bemerkung 23.58 erwähnte, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen soll hierbei natürlich nicht benutzt werden.

Aufgabe 23.60. Man zeige: Sind K und L zwei kompakte Teilmengen eines normierten Raumes, so ist auch deren Summe $K + L = \{a + b : a \in K, b \in L\}$ kompakt.