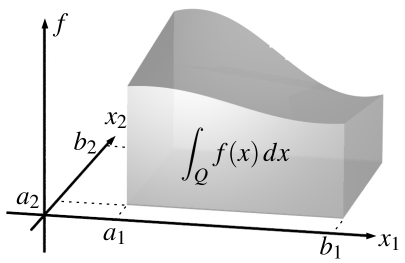
28. Integralrechnung im Mehrdimensionalen

Wir haben nun das Studium der Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen beendet und werden uns als Nächstes wie im Eindimensionalen der Integration zuwenden.

Zum Einstieg wollen wir uns dabei anschauen, was wir von einer solchen Verallgemeinerung des Integralbegriffs ins Mehrdimensionale überhaupt erwarten würden. Dazu erinnern wir uns daran, dass wir im eindimensionalen Fall in Kapitel 12 zwei Interpretationsmöglichkeiten für das Integral hatten:

- (Flächenberechnung) Wir konnten mit Hilfe des Integrals die Fläche unter dem Graphen einer Funktion in einer reellen Variablen berechnen.

  Die direkte Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale besteht hier offensichtlich darin, eine reellwertige Funktion in n Variablen zu betrachten und wie im Bild rechts nach dem $(n+1)$-dimensionalen Volumen des Gebiets unter dem Graphen von f zu fragen, z. B. über einem Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. In der Tat ist die exakte Formulierung und Lösung dieses Problems der Inhalt dieses Kapitels. Wir werden das Ergebnis als das n-dimensionale Integral von f über Q bezeichnen und als $\int_Q f(x)\,dx$ schreiben.

- (Umkehrung der Differentiation) Im Eindimensionalen ließ sich das Problem der Flächenberechnung unter dem Graphen einer Funktion f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 12.21 auf die Suche nach einer Stammfunktion zurückführen, also einer Funktion F mit $F' = f$. Im Mehrdimensionalen besteht dieser direkte Zusammenhang jedoch nicht mehr: Auch hier kann man sich zwar fragen, ob man z. B. zu einer gegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ finden kann — aber allein schon daran, dass wir hierfür eine Funktion f mit Zielraum $\mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{R})$ benötigen, da die Ableitung von F ja eine derartige Matrix ist, kann man erkennen, dass dies nicht dieselbe Fragestellung wie die der Volumenberechnung unter dem Graphen von f sein kann.

  Dieses Problem der Umkehrung der Differentiation im Mehrdimensionalen erfordert vielmehr andere Methoden, die ihr in der Vorlesung „Vektoranalysis" des zweiten Studienjahres kennenlernen könnt. Die folgende Aufgabe soll dabei nur einen kleinen Vorgeschmack auf die dort zu erwartenden Resultate geben: Sie zeigt, dass die Existenz einer Funktion F mit $F' = f$ im Gegensatz zum eindimensionalen Fall auch für stetiges f keinesfalls automatisch ist und darüber hinaus auch noch von der Form der betrachteten Definitionsmenge abhängt.

Aufgabe 28.1 (Umkehrung der Differentiation in $\mathbb{R}^2$)**.** Man zeige:

(a) Sind $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, so gibt es genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F' = (\, f_1 \mid f_2\,)$, wenn $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.

(b) Im Fall der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ hingegen ist diese Aussage falsch: Die Funktionen

$$f_1\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad f_2\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

erfüllen zwar $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$, aber es gibt keine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ mit $F' = (\, f_1 \mid f_2\,)$.

(Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, die Formel $F(x) - F(a) = \int_0^1 F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$ für einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von a nach x zu zeigen und zu benutzen.)

Bemerkung 28.2 (Riemann- und Lebesgue-Integral)**.** Um die obige Frage nach dem Volumen unter dem Graphen einer Funktion in mehreren Variablen formal exakt zu untersuchen, gibt es verschiedene Herangehensweisen. Wir werden in dieser Vorlesung die sogenannte *Riemannsche Integrationstheorie* behandeln, die das Integral völlig analog zum eindimensionalen Fall in Kapitel 12 über Unter- und Obersummen zu immer feiner werdenden Zerlegungen des Integrationsbereichs definiert. Der Hauptvorteil dieser Theorie ist, dass sie relativ einfach ist und für viele Funktionen, z. B. für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, schnell zum gewünschten Ergebnis führt. Für Anwendungen z. B. in der Stochastik ist es allerdings unabdingbar, den Integralbegriff deutlich zu erweitern. Analog zur Differentiation, die man nach Bemerkung 25.6 nicht nur in $\mathbb{R}^n$, sondern sogar in allgemeinen normierten Räumen einführen kann, kann man auch Integrale nicht nur von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, sondern auch von solchen auf allgemeineren Räumen, den sogenannten *Maßräumen*, definieren. Diese allgemeinere Integrationstheorie, das sogenannte *Lebesgue-Integral*, ist vom theoretischen Standpunkt her zwar deutlich schöner, allerdings auch deutlich komplizierter als die Riemannsche Theorie, und wird daher erst in der für das spätere Studium angebotenen Vorlesung „Maß- und Integrationstheorie“ ausführlich behandelt.

28.A Das mehrdimensionale Riemann-Integral

Wir beginnen damit, analog zu Kapitel 12 Unter- und Obersummen beschränkter Funktionen und damit schließlich das Integral solcher Funktionen in mehreren Variablen einzuführen. Viele Definitionen und Resultate sind dabei bis auf kleine Modifikationen dieselben wie im eindimensionalen Fall. Beweise, die wörtlich genauso funktionieren wie in Kapitel 12, werden wir dabei natürlich nicht noch einmal hinschreiben.

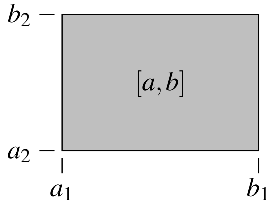
Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns zunächst einmal nur mit Integralen von Funktionen, die auf einem Quader (also einem Produkt von Intervallen) definiert sind. Den Fall allgemeinerer Integrationsbereiche werden wir dann im nächsten Kapitel darauf zurückführen.

Notation 28.3 (Quader)**.** Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $a_1, \dots, a_n$ bzw. $b_1, \dots, b_n$, so dass $a_i \le b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann heißt die Menge

$$[a,b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \subset \mathbb{R}^n$$

ein **Quader** in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren das **Volumen** eines solchen Quaders als

$$\mathrm{vol}([a,b]) := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$



Die folgenden beiden Definitionen sind völlig analog, und im eindimensionalen Fall $n = 1$ auch äquivalent zu Definition 12.1.

Definition 28.4 (Zerlegungen)**.** Es sei $[a,b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader.

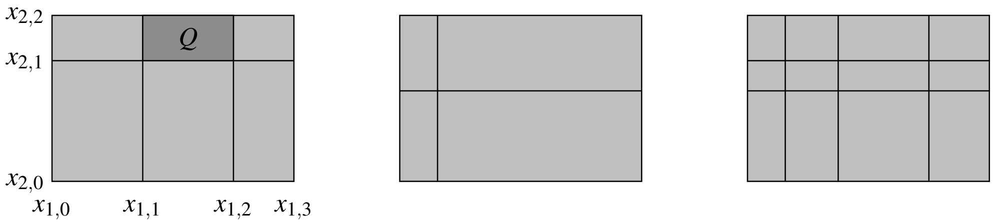
(a) Eine **Zerlegung** $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ des Quaders $[a,b]$ besteht aus Zerlegungen Z_i der Intervalle $[a_i, b_i]$ im Sinne von Definition 12.1 (a) für alle $i = 1, \dots, n$. Es ist also jedes $Z_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,k_i}\}$ eine endliche Teilmenge von $[a_i, b_i]$ mit $a_i, b_i \in Z_i$, von der wir vereinbaren, dass in dieser Schreibweise immer $a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i$ gilt. Ein **Teilquader** von Z ist wie im Bild unten links ein Quader Q der Form

$$[x_{1,j_1-1}, x_{1,j_1}] \times \cdots \times [x_{n,j_n-1}, x_{n,j_n}] \quad \subset [a,b]$$

für gewisse $j_1, \dots, j_n$ mit $1 \le j_i \le k_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir bezeichnen die Menge aller solcher Teilquader von Z mit $\mathrm{TQ}(Z)$.

(b) Sind $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ und $Z' = (Z'_1, \dots, Z'_n)$ zwei Zerlegungen von $[a,b]$, so nennen wir Z' eine **Verfeinerung** von Z und schreiben dies als $Z \subset Z'$, wenn $Z_i \subset Z'_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, also jedes Z'_i im Sinne von Definition 12.1 (a) eine Verfeinerung von Z_i ist.

(c) Für zwei beliebige Zerlegungen $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ und $Z' = (Z'_1, \dots, Z'_n)$ von $[a,b]$ definieren wir wie im folgenden Bild dargestellt $Z \cup Z' := (Z_1 \cup Z'_1, \dots, Z_n \cup Z'_n)$; offensichtlich ist dies eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'.



Eine Zerlegung Z mit einem Teilquader Q, ... eine weitere Zerlegung Z'... und die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup Z'$

Bemerkung 28.5. Ist Z eine Zerlegung eines Quaders $[a,b]$, so sollte es anschaulich klar sein, dass die Summe der Volumina aller Teilquader in Z das Gesamtvolumen $\operatorname{vol}([a,b])$ ergibt. Wir können dies auch leicht explizit nachrechnen: Mit den Notationen aus Definition 28.4 ist

$$\begin{aligned}
\sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \operatorname{vol}(Q) &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} (x_{1,j_1} - x_{1,j_1-1}) \cdot \cdots \cdot (x_{n,j_n} - x_{n,j_n-1}) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} (x_{1,j_1} - x_{1,j_1-1}) \right)}_{b_1 - a_1} \cdot \cdots \cdot \underbrace{\left(\sum_{j_n=1}^{k_n} (x_{n,j_n} - x_{n,j_n-1}) \right)}_{b_n - a_n} \\
&= \operatorname{vol}([a,b]).
\end{aligned}$$

Definition 28.6 (Unter- und Obersummen)**.** Es sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Für eine Zerlegung Z von $[a,b]$ nennen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{US}(f,Z) &:= \sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \operatorname{vol}(Q) \cdot \inf f(Q) && \text{die } \textbf{Untersumme} \text{ und} \\
\mathrm{OS}(f,Z) &:= \sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \operatorname{vol}(Q) \cdot \sup f(Q) && \text{die } \textbf{Obersumme}
\end{aligned}$$

von f bezüglich Z.

Der Weg von den Unter- und Obersummen zum Integral ist derselbe wie im Eindimensionalen in Lemma 12.3, Definition 12.5, Lemma 12.6 und Definition 12.7: Wir wollen, dass sich Unter- und Obersummen dem gesuchten Integral annähern, also dass das Supremum aller Untersummen gleich dem Infimum aller Obersummen ist.

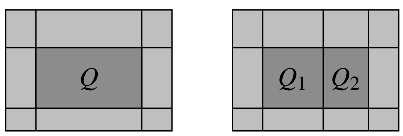
Lemma 28.7 (Eigenschaften von Unter- und Obersummen)**.** *Es seien $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $[a,b]$ und Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt:*

(a) *Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so gilt* $\mathrm{US}(f,Z') \geq \mathrm{US}(f,Z)$ *und* $\mathrm{OS}(f,Z') \leq \mathrm{OS}(f,Z)$.

(b) $\mathrm{US}(f,Z) \leq \mathrm{OS}(f,Z')$.

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas ist nahezu der gleiche wie der von Lemma 12.3.

(a) Da jede Verfeinerung von Z durch endliches Hinzufügen von weiteren Unterteilungspunkten in den Seitenintervallen von $[a,b]$ entsteht, genügt es, den Fall zu betrachten, dass Z' wie im Bild rechts aus Z durch Hinzufügen eines weiteren Zwischenpunktes in einer der Koordinaten entsteht.



Z Z'

Ist Q dann ein Teilquader von Z, der in Z' in zwei Teilquader Q_1 und Q_2 aufgeteilt wird, so gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(Q_1)\cdot\inf f(Q_1)+\operatorname{vol}(Q_2)\cdot\inf f(Q_2) &\geq \operatorname{vol}(Q_1)\cdot\inf f(Q)+\operatorname{vol}(Q_2)\cdot\inf f(Q)\\ &= \operatorname{vol}(Q)\cdot\inf f(Q).\end{aligned}$$

Aufsummieren dieser Ungleichungen über alle Teilquader liefert damit die behauptete Ungleichung $\mathrm{US}(f,Z')\geq\mathrm{US}(f,Z)$ für die Untersummen. Die Aussage über die Obersummen beweist man natürlich genauso.

(b) Da $Z\cup Z'$ eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z' ist, folgt aus (a)

$$\mathrm{US}(f,Z)\leq\mathrm{US}(f,Z\cup Z')\leq\mathrm{OS}(f,Z\cup Z')\leq\mathrm{OS}(f,Z'),$$

wobei die mittlere Ungleichung gilt, weil das Infimum einer Menge immer kleiner oder gleich dem Supremum ist. □

Definition 28.8 (Integrierbarkeit)**.** Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $[a,b]\subset\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\mathrm{UI}(f):=\sup\{\mathrm{US}(f,Z): Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \qquad \text{das **Unterintegral**, und analog}$$

$$\mathrm{OI}(f):=\inf\{\mathrm{OS}(f,Z): Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \qquad \text{das **Oberintegral**}$$

von f (beachte, dass dieses Supremum bzw. Infimum existiert, da die Menge aller Untersummen nach Lemma 28.7 (b) durch jede Obersumme nach oben beschränkt, und die Menge aller Obersummen durch jede Untersumme nach unten beschränkt ist). Wie in Lemma 12.6 zeigt man, dass stets $\mathrm{UI}(f)\leq\mathrm{OI}(f)$ gilt. Ist sogar $\mathrm{UI}(f)=\mathrm{OI}(f)$, so nennen wir f **(Riemann-)integrierbar**, und definieren das **Integral** von f als diesen Wert

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx:=\mathrm{UI}(f)=\mathrm{OI}(f).$$

Möchte man explizit schreiben, dass hier über mehrere Variablen integriert wird, sind für dieses Integral auch die Schreibweisen

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d(x_1,\dots,x_n) \qquad \text{und} \qquad \int_{[a,b]} f(x)\,d^n x$$

üblich. Im Gegensatz zum Eindimensionalen wird im mehrdimensionalen Fall aber immer der Integrationsbereich als Menge unten ans Integralzeichen geschrieben — eine Schreibweise $\int_a^b$ wie im Eindimensionalen werden wir nicht verwenden, zumal sie für allgemeinere Integrationsbereiche als Quader, wie wir sie im nächsten Kapitel betrachten werden, auch gar nicht möglich wäre.

Beispiel 28.9. Im eindimensionalen Fall sind alle obigen Definitionen offensichtlich exakt dieselben wie in Kapitel 12, so dass sich in diesem Fall auch der gleiche Integralbegriff ergibt. Hier sind daher zwei Beispiele für die explizite Berechnung eines mehrdimensionalen Integrals mit Hilfe von Unter- und Obersummen.

(a) Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ eine konstante Funktion auf einem n-dimensionalen Quader $[a,b]$. Dann sind alle Suprema und Infima auf von f gleich c, und demzufolge gilt sowohl für die Untersumme als auch für die Obersumme von f zu einer beliebigen Zerlegung Z:

$$\mathrm{US}(f,Z)=\mathrm{OS}(f,Z)=\sum_{Q\in\mathrm{TQ}(Z)}\operatorname{vol}(Q)\cdot c\overset{28.5}{=}c\cdot\operatorname{vol}([a,b]).$$

Damit sind also auch das Unter- und Oberintegral von f gleich $c\cdot\operatorname{vol}([a,b])$, d. h. f ist wie erwartet integrierbar mit $\int_{[a,b]} f(x)\,dx=c\cdot\operatorname{vol}([a,b])$.

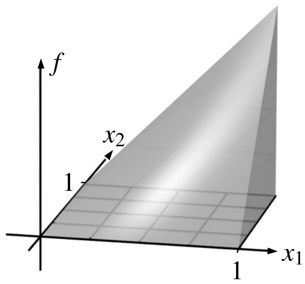
(b) Es sei

$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x_1\cdot x_2$$

die rechts dargestellte Funktion. Für ein $n\in\mathbb{N}_{>0}$ wollen wir die (im Bild für $n=4$ eingezeichnete) Zerlegung

$$Z=\left(\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\},\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}\right)$$

von $[0,1]\times[0,1]$ in n^2 Teilquadrate der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ betrachten und analog zu Beispiel 12.2 die zugehörige Unter- und Obersumme von f berechnen.



Da f auf jedem solchen Teilquadrat $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]$ das Minimum am linken unteren Punkt $\left(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right)$ annimmt, berechnet sich die Untersumme zu

$$\begin{aligned}\mathrm{US}(f,Z)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot f\Big(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\Big)\\&=\frac{1}{n^4}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}(j-1)\Big)\\&=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{(n-1)^2}{4n^2}.\end{aligned}$$

Genauso nimmt f das Maximum auf jedem Teilquadrat am rechten oberen Punkt an, und man erhält mit der entsprechenden Rechnung

$$\mathrm{OS}(f,Z)=\frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

Damit haben wir die Abschätzungen

$$\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\mathrm{US}(f,Z)\le\mathrm{UI}(f)\le\mathrm{OI}(f)\le\mathrm{OS}(f,Z)=\frac{(n+1)^2}{4n^2},$$

da das Unter- bzw. Oberintegral nach Definition eine obere bzw. untere Schranke für die Unter- bzw. Obersummen ist. Bilden wir von dieser Ungleichungskette nun den Grenzwert für $n\to\infty$, so sehen wir, dass

$$\frac{1}{4}\le\mathrm{UI}(f)\le\mathrm{OI}(f)\le\frac{1}{4},$$

d. h. f ist integrierbar mit $\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x)\,dx=\mathrm{UI}(f)=\mathrm{OI}(f)=\frac{1}{4}$.

Um die Integrierbarkeit von Funktionen in Zukunft einfacher beweisen zu können, halten wir als Nächstes das folgende sehr wichtige Kriterium fest, das wir auch schon aus dem Eindimensionalen kennen (siehe Lemma 12.11).

Lemma 28.10 (**Riemannsches Integrabilitätskriterium**). *Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $[a,b]$.*

(a) *f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt mit $\mathrm{OS}(f,Z)-\mathrm{US}(f,Z)<\varepsilon$.*

(b) *f ist genau dann integrierbar mit Integral $\int_{[a,b]}f(x)\,dx=c$, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ Zerlegungen Z und Z' von $[a,b]$ gibt mit $\mathrm{OS}(f,Z)<c+\varepsilon$ und $\mathrm{US}(f,Z')>c-\varepsilon$.*

Beweis. Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der von Lemma 12.11. □

Ebenfalls wie im Eindimensionalen können wir mit Hilfe dieses Kriteriums nun zeigen, dass jede stetige Funktion integrierbar ist.

Satz 28.11. *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Quader $[a,b]$, so ist f auch integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zu dem von Satz 12.12. Da der Quader $[a,b]$ beschränkt und nach Aufgabe 23.42 (b) auch abgeschlossen ist, ist er nach Satz 23.50 (b) kompakt. Also ist f nach Folgerung 24.24 beschränkt, so dass wir die Begriffe dieses Kapitels anwenden können. Wir zeigen nun die Integrierbarkeit von f mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (a).

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ ist f nach Bemerkung 24.34 (a) sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}([a,b])}$ für alle $y,z \in [a,b]$ mit $||y-z||_\infty < \delta$ gilt.

Wir wählen nun eine Zerlegung Z von $[a,b]$, so dass alle Kantenlängen der Teilquader von Z kleiner als δ sind. Dann gilt zunächst

$$\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) = \sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q) \cdot \big(\sup f(Q) - \inf f(Q)\big).$$

Da alle hier auftretenden Teilquader Q kompakt sind, nimmt f dort als stetige Funktion nach Folgerung 24.24 ein Maximum und Minimum an. Es gibt also Punkte $y_Q, z_Q \in Q$ mit $f(y_Q) = \sup f(Q)$ und $f(z_Q) = \inf f(Q)$. Weil y_Q und z_Q beide in dem Quader Q liegen, dessen Kantenlängen ja kleiner als δ sind, ist natürlich auch $||y_Q - z_Q||_\infty < \delta$ und damit $|f(y_Q) - f(z_Q)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}([a,b])}$ nach Wahl von δ. Wir können oben also weiterrechnen und erhalten

$$\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) = \sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q) \cdot (f(y_Q) - f(z_Q)) < \sum_{Q \in \mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}([a,b])} = \varepsilon,$$

da die Summe aller Volumina der Teilquader nach Beispiel 28.9 (a) gleich $\mathrm{vol}([a,b])$ ist. Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun also aus Lemma 28.10 (a). □

Eine wesentliche Verallgemeinerung dieser Aussage werden wir in Satz 29.25 kennenlernen. Zunächst einmal wollen wir aber die wichtigsten elementaren Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammenfassen, die sich genauso wie im Eindimensionalen in Satz 12.13 ergeben.

Satz 28.12 (Eigenschaften des Integrals)**.** *Es seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.*

(a) *$f+g$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt*
$$\int_{[a,b]} (f(x)+g(x))\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

(b) *cf ist ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt*
$$\int_{[a,b]} c\,f(x)\,dx = c \cdot \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

(c) *Ist $f \le g$, d. h. $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $\int_{[a,b]} f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} g(x)\,dx$.*

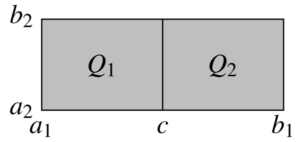
(d) *$|f|$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt die* ***Dreiecksungleichung***
$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \le \int_{[a,b]} |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Der Beweis verläuft genauso wie in Satz 12.13, wobei sich auch der Beweis der dort zentral verwendeten Aussage aus Aufgabe 12.4 wörtlich auf den mehrdimensionalen Fall überträgt. □

Aufgabe 28.13 (Integrale über Randfunktionen, siehe Beispiel 12.9 (c))**.** Es sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige: Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{Q}$, so ist f integrierbar mit $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = 0$.

Aufgabe 28.14 (Additivität des Integrals, siehe Satz 12.14)**.** Es sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige: Ist $c \in (a_1,b_1)$, so ist f genau dann auf Q integrierbar, wenn f auf

$$Q_1 = [a_1,c] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$$
$$\text{und} \quad Q_2 = [c,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$$



integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_{Q_1} f(x)\,dx + \int_{Q_2} f(x)\,dx.$$

Aufgabe 28.15. Es seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige:

(a) Die Funktion $f \cdot g$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

(Hinweis: Man kann sich etwas Arbeit sparen, indem man die Aussage zunächst nur im Fall $g = f$ zeigt und sich dann überlegt, warum daraus bereits der allgemeine Fall folgt.)

(b) (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist f sogar stetig und $g \geq 0$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_{[a,b]} f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_{[a,b]} g(x)\,dx.$$ 71

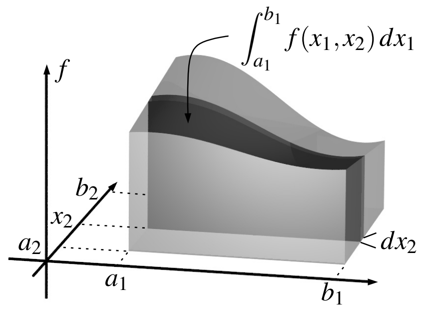
28.B Der Satz von Fubini

Wir haben die eindimensionale Theorie des Riemann-Integrals jetzt so weit ins Mehrdimensionale übertragen, wie dies ohne nennenswerte Änderungen möglich ist. Natürlich müssen wir nun aber auch noch untersuchen, wie man mehrdimensionale Integrale überhaupt in der Praxis berechnen kann, ohne jedesmal Grenzwerte von Unter- und Obersummen bestimmen zu müssen.

Dazu betrachten wir einmal die Situation wie im Bild rechts, bei der wir das Integral einer Funktion $f\colon [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}$, also das Volumen unter dem Graphen dieser Funktion berechnen wollen. Halten wir dann zunächst einmal einen Wert $x_2 \in [a_2,b_2]$ fest, so ist das eindimensionale Integral

$$F(x_2) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1$$

natürlich gerade die rechts dunkel eingezeichnete Querschnittsfläche des betrachteten Volumens mit einer senkrechten Ebene beim festen Wert x_2.



Anschaulich können wir uns den Ausdruck $F(x_2)\,dx_2$ also als eine dünne Scheibe des betrachteten Volumens vorstellen, die die Querschnittsfläche $F(x_2)$ und die Dicke dx_2 hat. Summieren wir nun die Volumina dieser dünnen Scheiben von a_2 bis b_2 auf, bilden wir also das Integral

$$\int_{a_2}^{b_2} F(x_2)\,dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1 \right) dx_2,$$

so würden wir demnach erwarten, dass wir damit das gesuchte Gesamtvolumen unter dem Graphen von f erhalten: Das ursprüngliche zweidimensionale Integral sollte sich gemäß

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1 \right) dx_2$$

als doppeltes eindimensionales Integral schreiben lassen, das wir dann natürlich mit unseren bekannten Methoden aus Kapitel 12 berechnen können.

Wir werden nun beweisen, dass dies (unter recht milden Voraussetzungen an f) in der Tat richtig ist. Da wir später natürlich nicht nur zweidimensionale Integrale untersuchen wollen, betrachten wir dabei gleich den allgemeinen Fall, in dem die Variablen x_1 und x_2 oben selbst wieder aus mehreren Komponenten bestehen. Zum besseren anschaulichen Verständnis des folgenden Satzes, der im Wesentlichen die obige Idee zu einem exakten Beweis macht, ist es aber vermutlich von Vorteil, wenn ihr euch die beiden Einzelintegrale erst einmal wie oben als jeweils eindimensional vorstellt, in der Notation des Satzes also an den Fall $n = n' = 1$ denkt.

Satz 28.16 (**Satz von Fubini** für Quader)**.** *Es seien $[a,b]$ und $[a',b']$ zwei Quader in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n'}$ mit Koordinaten x bzw. x'. Ferner sei $f\colon [a,b] \times [a',b'] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, für die auch die Integrale*

$$F(x') := \int_{[a,b]} f(x,x')\,dx$$

über die erste Komponente für alle $x' \in [a',b']$ existieren.

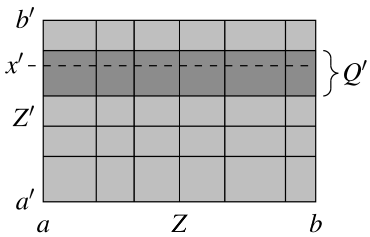
Dann ist auch $F\colon [a',b'] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{[a',b']} F(x')\,dx' = \int_{[a',b']} \left(\int_{[a,b]} f(x,x')\,dx \right) dx' = \int_{[a,b]\times[a',b']} f(x,x')\,d(x,x').$$

Beweis. Die erste Gleichung in der Behauptung ist natürlich einfach nur die Definition von F. Wir zeigen nun die Integrierbarkeit von F zusammen mit der zweiten Gleichung über das Riemannsche Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (b).

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f nach Voraussetzung integrierbar ist, gibt es nach Lemma 28.10 (b) eine Zerlegung (Z,Z') von $[a,b] \times [a',b']$ mit

$$\mathrm{US}(f,(Z,Z')) > \int_{[a,b]\times[a',b']} f(x,x')\,d(x,x') - \varepsilon. \qquad (1)$$



Betrachten wir wie im Bild rechts einen Teilquader Q' der so gewonnenen Zerlegung Z' von $[a',b']$, so gilt für alle $x' \in Q'$

$$\begin{aligned} F(x') &= \int_{[a,b]} f(x,x')\,dx && \text{(Definition von } F\text{)} \qquad (2)\\ &\geq \mathrm{US}(f|_{[a,b]\times\{x'\}}, Z) && \text{(Integral obere Schranke für Untersummen)}\\ &= \sum_{Q\in\mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q)\cdot \inf f(Q\times\{x'\}) && \text{(Definition der Untersumme)}\\ &\geq \sum_{Q\in\mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q)\cdot \inf f(Q\times Q'), && \text{(größere Menge} \Rightarrow \text{kleineres Infimum)} \end{aligned}$$

und damit auch für das Infimum dieser Zahlen

$$\inf F(Q') \geq \sum_{Q\in\mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q)\cdot \inf f(Q\times Q'). \qquad (3)$$

Wir erhalten so für die Untersumme von F bezüglich Z' die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathrm{US}(F,Z') &= \sum_{Q'\in\mathrm{TQ}(Z')} \mathrm{vol}(Q')\cdot \inf F(Q')\\ &\overset{(3)}{\geq} \sum_{Q'\in\mathrm{TQ}(Z')} \mathrm{vol}(Q')\cdot \sum_{Q\in\mathrm{TQ}(Z)} \mathrm{vol}(Q)\cdot \inf f(Q\times Q')\\ &= \sum_{Q\times Q'\in\mathrm{TQ}(Z,Z')} \mathrm{vol}(Q\times Q')\cdot \inf f(Q\times Q')\\ &= \mathrm{US}(f,(Z,Z'))\\ &\overset{(1)}{>} \int_{[a,b]\times[a',b']} f(x,x')\,d(x,x') - \varepsilon. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man für die Obersumme von F

$$\mathrm{OS}(F,Z') < \int_{[a,b]\times[a',b']} f(x,x')\,d(x,x') + \varepsilon.$$

Damit folgt aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (b), dass F' integrierbar ist mit

$$\int_{[a',b']} F(x')\,dx' = \int_{[a,b]\times[a',b']} f(x,x')\,d(x,x'). \qquad \square$$

Folgerung 28.17. *Es seien $[a,b] = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ ein Quader und $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann lässt sich das Integral über f als n-faches eindimensionales Integral*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n}\left(\cdots\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx_1\right)dx_2\cdots\right)dx_n$$

berechnen. Außerdem darf die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale dabei beliebig vertauscht werden (was wir auch bereits in Aufgabe 25.25 (c) gesehen hatten).

Beweis. Dies folgt sofort mit Induktion aus Satz 28.16: Mit $Q = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$ ergibt dieser Satz zunächst

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_Q f(x)\,d(x_1,\dots,x_{n-1})\right)dx_n,$$

da sowohl f als auch die eingeschränkte Funktion $(x_1,\dots,x_{n-1})\mapsto f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ für festes x_n stetig und damit nach Satz 28.11 integrierbar sind. Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf das innere Integral liefert dann sofort die Behauptung. Da die Nummerierung der Variablen beliebig ist, erhält man die gleiche Aussage natürlich auch mit einer anderen Reihenfolge der Integrale. $\square$

Notation 28.18. In der Aussage von Folgerung 28.17 lässt man die Klammern oft weg und schreibt das Integral damit als

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n,$$

wobei dann darauf zu achten ist, dass die Integrationsgrenzen an den Integralzeichen in umgekehrter Reihenfolge wie die Differentiale $dx_1,\dots,dx_n$ geschrieben werden.

Ein einfacher Spezialfall des Satzes von Fubini ergibt sich in der oft auftretenden Situation, dass der Integrand ein Produkt von zwei Funktionen ist, die nur von jeweils einer der Variablen abhängen:

Folgerung 28.19. *Es seien $[a,b]$ und $[a',b']$ zwei Quader in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n'}$ sowie $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ und $g\colon [a',b']\to\mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{[a,b]\times[a',b']} f(x)g(x')\,d(x,x') = \left(\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{[a',b']} g(x')\,dx'\right).$$

Beweis. Als stetige Funktion ist das Produkt $(x,x')\mapsto f(x)g(x')$ nach Satz 28.11 integrierbar. Der Satz 28.16 von Fubini ergibt daher unmittelbar

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[a',b']} f(x)g(x')\,d(x,x') &= \int_{[a',b']}\left(\int_{[a,b]} f(x)g(x')\,dx\right)dx' \\ &\overset{(1)}{=} \int_{[a',b']}\left(\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right)\cdot g(x')\,dx' \\ &\overset{(2)}{=} \left(\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{[a',b']} g(x')\,dx'\right),\end{aligned}$$

da man von der Integrationsvariablen unabhängige Faktoren ($g(x')$ in (1) bzw. das Integral über x in (2)) nach Satz 28.12 (b) aus dem Integral herausziehen kann. $\square$

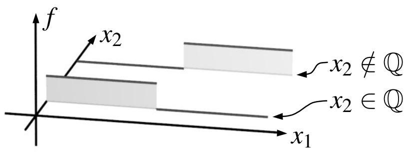
Beispiel 28.20. Mit Hilfe von Folgerung 28.19 können wir das Integral $\int_{[0,1]\times[0,1]} x_1 x_2\, dx$ aus Beispiel 28.9 (b) nun auch viel einfacher berechnen, indem wir es auf zwei eindimensionale Integrale zurückführen und die Methoden aus Kapitel 12 benutzen: Es ist

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} x_1 x_2\, dx = \left(\int_0^1 x_1\, dx_1\right)\cdot\left(\int_0^1 x_2\, dx_2\right) = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Bemerkung 28.21 (Notwendigkeit der Integrierbarkeitsvoraussetzungen im Satz von Fubini)**.**

(a) Die Voraussetzung der Integrierbarkeit der Gesamtfunktion f in Satz 28.16 ist wirklich notwendig: Dass es nicht genügt, die Existenz des Doppelintegrals vorauszusetzen, zeigt das Beispiel der Funktion

$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases} 1 & \text{für } x_1\le\frac{1}{2},\ x_2\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x_1>\frac{1}{2},\ x_2\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x_1\le\frac{1}{2},\ x_2\notin\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x_1>\frac{1}{2},\ x_2\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$



Für diese Funktion ist offensichtlich

$$\int_0^1 f(x_1,x_2)\, dx_1 = \frac{1}{2}$$

für alle $x_2\in[0,1]$, und damit existiert das Doppelintegral

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1,x_2)\, dx_1\right) dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx_2 = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion f ist jedoch auf dem Quader $[0,1]\times[0,1]$ nicht integrierbar, da jeder Teilquader einer Zerlegung Z von $[0,1]\times[0,1]$ Punkte mit Funktionswert 0 und solche mit Funktionswert 1 enthält, so dass also stets $\mathrm{US}(f,Z)=0$ und $\mathrm{OS}(f,Z)=1$ und damit $\mathrm{UI}(f)=0$ und $\mathrm{OI}(f)=1$ gelten.

(b) Die in Satz 28.16 vorausgesetzte Existenz des inneren Integrals $F(x')$ ist hingegen *nicht* wirklich essentiell: Existiert dieses Integral nicht für alle x', so können wir $F(x')$ stattdessen als das (immer existierende) Unter- oder Oberintegral der Funktion $x\mapsto f(x,x')$ auf $[a,b]$ definieren. Tun wir dies, ändert sich im Beweis des Satzes lediglich der Ausdruck für $F(x')$ in (2) — aber die darauf folgende Abschätzung und damit auch der Rest des Beweises bleiben weiterhin gültig, da sowohl das Unter- als auch das Oberintegral eine obere Schranke für jede Untersumme ist.

In der Literatur wird der Satz von Fubini daher auch oft ohne die Voraussetzung der Existenz des inneren Integrals angegeben. Die Aussage des Satzes ist dann also so zu verstehen, dass man das innere Integral wahlweise als Unter- oder als Oberintegral interpretieren kann, falls diese nicht übereinstimmen.

Aufgabe 28.22. Berechne das Integral $\displaystyle\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{1}{x+y}\, d(x,y)$.

Aufgabe 28.23. Man zeige: Ist $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion auf einem Quader $[a,b]\subset\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx\cdot\int_{[a,b]} \frac{1}{f(x)}\, dx \ge (\mathrm{vol}([a,b]))^2.$$

72 (Hinweis: Beweise und verwende die Ungleichung $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\ge 2$ für alle $x,y\in[a,b]$.)