

## 29. Messbare Mengen

Im letzten Kapitel haben wir in direkter Analogie zu Kapitel 12 das mehrdimensionale Riemann-Integral über Quader in  $\mathbb{R}^n$  eingeführt. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall gibt es in  $\mathbb{R}^n$  aber natürlich noch sehr viel mehr anders geformte Mengen — z. B. Kreise, Ellipsen, oder generell durch irgendwelche Ungleichungen in den Koordinaten gegebene Teilmengen — über die man in der Praxis auch integrieren möchte. Wir wollen daher in diesem Kapitel sehen, wie man unsere Konstruktionen und Ergebnisse auf solche allgemeinen Integrationsbereiche ausdehnen kann.

### 29.A Integrale über beschränkte Mengen

Für unsere Verallgemeinerung des Riemann-Integrals wollen wir zunächst nur Integrationsbereiche  $D$  betrachten, die zwar nicht notwendig Quader, aber zumindest noch in einem Quader enthalten (also beschränkt) sind. Auch die zu integrierende Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  werden wir erst einmal noch als beschränkt voraussetzen. In diesem Fall ist die Grundidee für die Konstruktion des Integrals sehr einfach: Wir setzen  $f$  auf einen beliebigen Quader  $[a, b] \supset D$  fort, indem wir die Funktionswerte außerhalb von  $D$  gleich 0 setzen. Integrieren wir die so fortgesetzte Funktion dann wie in Kapitel 28 über  $[a, b]$ , so sollte dieses Integral keine Beiträge von Punkten außerhalb von  $D$  enthalten, und wir können es als das Integral von  $f$  über  $D$  auffassen.

Wir führen daher als Erstes eine Notation für derartige durch 0 fortgesetzte Funktionen ein.

**Definition 29.1** (Indikatorfunktionen und Fortsetzung durch 0). Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Ferner sei  $D$  eine Teilmenge von  $M$ .

- (a) Wir bezeichnen die durch 0 außerhalb von  $D$  fortgesetzte Funktion  $f$  mit

$$f_D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

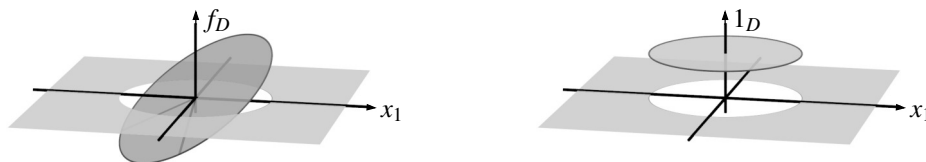
In der Regel werden wir hierbei nur den Fall  $D = M$  benötigen.

- (b) Speziell für die konstante Funktion 1 heißt

$$1_D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** oder **charakteristische Funktion** von  $D$ .

Das folgende Bild zeigt diese beiden Konstruktionen im Fall des Kreises  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  und der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_2$ .



#### Bemerkung 29.2.

- (a) Für die Indikatorfunktion  $1_D$  einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  erwarten wir offensichtlich, dass man ihr Integral als das ( $n$ -dimensionale) Volumen von  $D$  interpretieren kann. Wir werden dies in Definition 29.5 (b) zur Definition des Volumens benutzen.

- (b) Beachte, dass die Funktion  $f_D$  aus Definition 29.1 auch bei stetigem  $f$  in den Punkten von  $\partial D$  in der Regel unstetig ist. Hier liegt auch schon das Hauptproblem der obigen Idee, das Integral von  $f$  über  $D$  als das von  $f_D$  über einem Quader  $[a, b] \supset D$  zu definieren: Wegen dieser Unstetigkeitsstellen von  $f_D$  ist nicht klar, ob  $f_D$  überhaupt integrierbar ist — Satz 28.11 ist hier ja nicht anwendbar. In der Tat werden wir sehen, dass es auch entscheidend von der Form von  $D$  abhängt, ob dieses Integral existiert oder nicht.

Wenn wir das Integral einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  als das Integral von  $f_D$  über einem Quader  $[a, b] \supset D$  definieren wollen, müssen wir aber natürlich als Erstes zeigen, dass das Ergebnis nicht von der Wahl dieses Quaders abhängt. Dies wollen wir jetzt tun, und benötigen dafür zuvor noch eine allgemeine Konstruktion von Zerlegungen eines Quaders, die in diesem Kapitel noch mehrmals vorkommen wird.

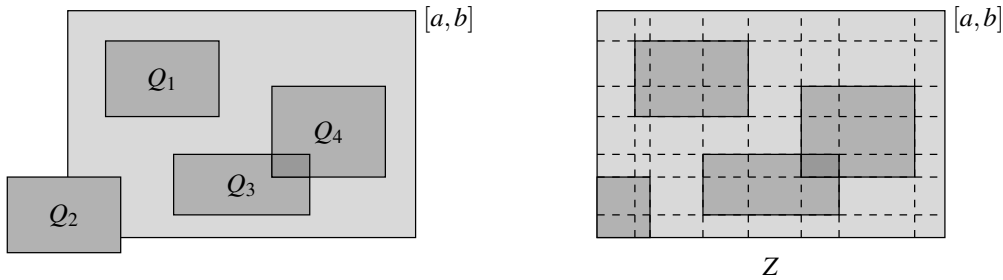
**Konstruktion 29.3** (Induzierte Zerlegungen). Es seien  $[a, b]$  und  $Q_1, \dots, Q_k$  für  $k \in \mathbb{N}$  Quader in  $\mathbb{R}^n$  mit

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{und} \quad Q_i = [a_{i,1}, b_{i,1}] \times \dots \times [a_{i,n}, b_{i,n}]$$

für alle  $i = 1, \dots, k$  (wobei  $Q_1, \dots, Q_k$  in  $[a, b]$  enthalten sein können, aber nicht müssen). Dann ist

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n) \quad \text{mit} \quad Z_j = [a_j, b_j] \cap \left( \{a_j, b_j\} \cup \{a_{i,j} : i = 1, \dots, k\} \cup \{b_{i,j} : i = 1, \dots, k\} \right)$$

eine Zerlegung von  $[a, b]$ , die wie im Bild unten anschaulich dadurch entsteht, dass wir alle Seiten der Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  über diese Quader hinaus fortsetzen. Wir nennen sie die von  $Q_1, \dots, Q_k$  *induzierte Zerlegung*. Sie hat offensichtlich die Eigenschaft, dass für jeden Quader  $Q_i$  der Schnitt  $Q_i \cap [a, b]$  gleich der Vereinigung aller  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \subset Q_i$  ist.



**Lemma 29.4.** Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion auf einer beschränkten Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^n$ . Ferner seien  $Q_1$  und  $Q_2$  Quader, die  $D$  enthalten.

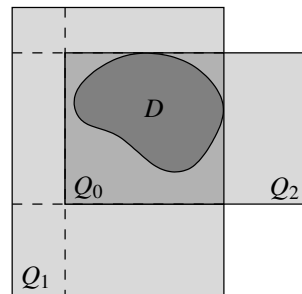
Dann ist die durch 0 fortgesetzte Funktion  $f_D$  genau dann über  $Q_1$  integrierbar, wenn sie über  $Q_2$  integrierbar ist, und im Fall der Integrierbarkeit gilt

$$\int_{Q_1} f_D(x) dx = \int_{Q_2} f_D(x) dx.$$

*Beweis.* Es sei  $Q_0 = Q_1 \cap Q_2$ ; auch dies ist offensichtlich ein Quader, der  $D$  enthält.

Wir betrachten nun wie im Bild gestrichelt eingezeichnet die von  $Q_0$  induzierte Zerlegung  $Z$  von  $Q_1$ . Auf dem Inneren aller Teilquader  $Q \neq Q_0$  von  $Z$  ist  $f_D$  dann gleich 0, und damit ist  $f_D$  nach Aufgabe 28.13 auf diesen  $Q$  integrierbar mit  $\int_Q f_D(x) dx = 0$ . Nach der Additivität des Integrals (siehe Aufgabe 28.14) angewendet auf die Zerlegung  $Z$  ist  $f_D$  also genau dann auf  $Q_1$  integrierbar, wenn  $f_D$  auf  $Q_0$  integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{Q_1} f_D(x) dx = \int_{Q_0} f_D(x) dx + \underbrace{\sum_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z) \\ Q \neq Q_0}} \int_Q f_D(x) dx}_{=0} = \int_{Q_0} f_D(x) dx.$$



Genauso folgt diese Aussage nun für  $Q_2$  und  $Q_0$ , und damit die Behauptung. □

Mit diesem Lemma können wir nun die am Anfang dieses Kapitels motivierte Definition exakt hinschreiben.

**Definition 29.5** (Integrierbarkeit und messbare Mengen). Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion auf einer beschränkten Menge  $D$ . Ferner wählen wir einen Quader  $Q \supset D$ .

- (a) Die Funktion  $f$  heißt **(Riemann-)integrierbar** (auf  $D$ ), wenn  $f_D$  im Sinne von Definition 28.8 auf  $Q$  integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_D f(x) dx := \int_Q f_D(x) dx.$$

- (b) Die Menge  $D$  heißt **(Jordan-)messbar**, wenn ihre Indikatorfunktion  $1_D$  integrierbar ist. In diesem Fall nennen wir

$$\text{vol}(D) := \int_D 1_D(x) dx \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

das **Volumen** von  $D$ .

Aufgrund von Lemma 29.4 sind diese Definitionen unabhängig von der Wahl von  $Q$ .

**Beispiel 29.6.**

- (a) Ist  $D$  in Definition 29.5 selbst ein Quader, so können wir dort offensichtlich  $Q = D$  wählen. Die Begriffe des Integrals über  $Q$  und des Volumens von  $Q$  stimmen dann also mit den alten aus Definition 28.8 bzw. Notation 28.3 überein (siehe Beispiel 28.9 (a)). Insbesondere sind Quader also stets messbar.
- (b) Die Menge  $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist nicht messbar, da ihre Indikatorfunktion nach Beispiel 12.9 (d) nicht integrierbar ist. Anschaulich heißt das, dass wir dieser Menge in unserer betrachteten Riemannsches Theorie nicht sinnvoll ein (1-dimensionales) Volumen zuordnen können. Dies sollte nicht weiter erstaunlich sein, wenn man bedenkt, dass ja in jeder Umgebung von jedem Punkt von  $[0, 1]$  sowohl Punkte in  $D$  als auch Punkte nicht in  $D$  liegen.
- (c) Betten wir diese Menge jedoch auf der  $x_1$ -Achse in den  $\mathbb{R}^2$  ein, betrachten wir also

$$D := \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

so ist  $D$  nach Aufgabe 28.13 nun messbar mit Volumen 0: Sie liegt komplett im Rand des Quaders  $[0, 1] \times [0, 1]$ , und damit ist  $1_D$  auch nur dort ungleich 0. Anschaulich gesehen hat die Menge  $D$  zwar immer noch dieselbe seltsame Form wie vorher in (b), aber sie ist trotzdem „klein genug“, um ihr das 2-dimensionale Volumen, also den Flächeninhalt 0 zuzuordnen.

Natürlich müssen wir nun Methoden finden, mit denen wir die Messbarkeit von Mengen überprüfen bzw. ihr Volumen berechnen können, und mit denen wir Integrale über allgemeine beschränkte Definitionsmengen bestimmen können. Als Erstes übertragen wir dazu die uns für Quader bereits bekannten Eigenschaften aus Satz 28.12 und erweitern sie noch um ein paar weitere.

**Folgerung 29.7** (Eigenschaften des Integrals). Es seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $f + g$  ist ebenfalls integrierbar auf  $D$ , und es gilt

$$\int_D (f(x) + g(x)) dx = \int_D f(x) dx + \int_D g(x) dx.$$

- (b)  $c f$  ist ebenfalls integrierbar auf  $D$ , und es gilt

$$\int_D c f(x) dx = c \cdot \int_D f(x) dx.$$

- (c) Ist  $f \leq g$ , d. h.  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D$ , so ist  $\int_D f(x) dx \leq \int_D g(x) dx$ .

(d)  $|f|$  ist ebenfalls integrierbar auf  $D$ , und es gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx.$$

*Beweis.* Alle diese Aussagen folgen mit Definition 29.5 (a) sofort aus Satz 28.12 angewendet auf  $f_D$  und  $g_D$ .  $\square$

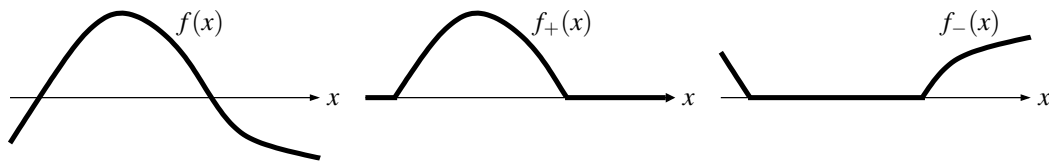
**Folgerung 29.8.** Es seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktionen auf einer beschränkten Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

- (a) Sind  $f$  und  $g$  integrierbar auf  $D$ , so sind auch die Funktionen  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  auf  $D$  integrierbar.  
 (b) Die Funktion  $f$  ist genau dann auf  $D$  integrierbar, wenn die beiden unten im Bild dargestellten Funktionen

$$f_+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f_- := \max(-f, 0)$$

integrierbar sind, und in diesem Fall gilt

$$\int_D f(x) dx = \int_D f_+(x) dx - \int_D f_-(x) dx.$$



*Beweis.*

(a) Wegen

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \left| \frac{f-g}{2} \right| \quad \text{und} \quad \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \left| \frac{f-g}{2} \right|$$

ergibt sich dies sofort aus Folgerung 29.7.

- (b) Ist  $f$  integrierbar, so sind nach (a) auch  $f_+$  und  $f_-$  integrierbar. Sind umgekehrt  $f_+$  und  $f_-$  integrierbar, so ist nach Folgerung 29.7 wegen  $f = f_+ - f_-$  auch  $f$  integrierbar, und es gilt die behauptete Formel.  $\square$

Mit diesen Ergebnissen können wir nun bereits ein Resultat analog zu Satz 12.14 und Aufgabe 28.14 über die Additivität von Integrationsbereichen bzw. Volumina zeigen.

**Folgerung 29.9** (Additivität des Integrals und des Volumens). Es seien  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  zwei beschränkte Mengen und  $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

(a) Ist  $f$  auf  $A$  und  $B$  integrierbar, so auch auf  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und  $A \setminus B$ , und es gilt

$$\int_{A \cup B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$$

und

$$\int_{A \setminus B} f(x) dx = \int_A f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

(b) Sind  $A$  und  $B$  messbar, so auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und  $A \setminus B$ , und es gilt

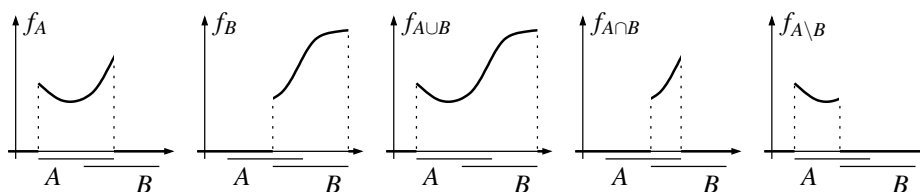
$$\text{vol}(A \cup B) + \text{vol}(A \cap B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) \quad \text{und} \quad \text{vol}(A \setminus B) = \text{vol}(A) - \text{vol}(A \cap B).$$

*Beweis.*

- (a) Nach Folgerung 29.8 (b) genügt es, die Aussage für die dort eingeführten Funktionen  $f_+$  und  $f_-$  zu zeigen, deren Funktionswerte ja überall nicht-negativ sind. Mit anderen Worten können wir uns auf den Fall beschränken, dass  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in A \cup B$  gilt. Dann gilt aber wie im Bild unten

$$f_{A \cup B} = \max(f_A, f_B), \quad f_{A \cap B} = \min(f_A, f_B) \quad \text{und} \quad f_{A \setminus B} = f_A - f_{A \cap B},$$

so dass sich die Integrierbarkeit dieser drei Funktionen, also die Integrierbarkeit von  $f$  auf  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und  $A \setminus B$  aus Folgerung 29.7 und 29.8 ergibt. Da außerdem offensichtlich  $f_{A \cup B} + f_{A \cap B} = f_A + f_B$  und  $f_{A \setminus B} = f_A - f_{A \cap B}$  gelten, zeigt Folgerung 29.7 auch die beiden behaupteten Gleichungen für diese Integrale.



- (b) folgt sofort aus (a) angewendet auf die konstante Funktion 1. □

**Bemerkung 29.10** (Eigenschaften des Volumens). Insbesondere ergibt sich aus Folgerung 29.9 (b) direkt:

- (a) Endliche Vereinigungen, Durchschnitte und Differenzmengen messbarer Mengen sind messbar.  
 (b) Sind  $A$  und  $B$  messbar und  $B \subset A$ , so ist

$$\text{vol}(B) = \text{vol}(A \cap B) = \text{vol}(A) - \text{vol}(A \setminus B) \leq \text{vol}(A)$$

(man sagt auch, das Volumen ist *monoton*).

- (c) Sind  $A$  und  $B$  messbar, so gilt für die damit ebenfalls messbare Menge  $A \cup B$

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B) \leq \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$$

(man sagt auch, das Volumen ist *subadditiv*). Mit vollständiger Induktion bedeutet dies natürlich auch

$$\text{vol}(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_k)$$

für messbare Mengen  $A_1, \dots, A_k$ .

- (d) Sind  $A_1, \dots, A_k$  messbare Mengen mit  $\text{vol}(A_i \cap A_j) = 0$  für alle  $i, j = 1, \dots, k$  mit  $i \neq j$ , so gilt sogar die Gleichheit

$$\text{vol}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_k)$$

(man sagt auch, dass das Volumen *additiv* ist). Dies sieht man leicht mit Induktion über  $k$ : Für  $k = 1$  ist die Aussage klar, und der Induktionsschritt  $k - 1 \rightarrow k$  ergibt sich aus

$$\text{vol}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \text{vol}(A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) + \text{vol}(A_k) - \text{vol}((A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \cap A_k)$$

(Folgerung 29.9 (b))

$$= \text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_k) - \text{vol}((A_1 \cap A_k) \cup \dots \cup (A_{k-1} \cap A_k))$$

(Induktionsvoraussetzung)

$$\stackrel{(c)}{\geq} \text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_k) - \text{vol}(A_1 \cap A_k) - \dots - \text{vol}(A_{k-1} \cap A_k)$$

$$= \text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_k),$$

da die umgekehrte Ungleichung aus (c) folgt.

**Beispiel 29.11** (Volumina offener Quader). Es sei  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader.

- (a) Der Rand  $\partial Q$  des Quaders ist nach Aufgabe 28.13 messbar mit Volumen 0 (da die Funktion  $1_{\partial Q}$  auf  $\overset{\circ}{Q}$  gleich 0 ist). Aus der Additivität des Volumens folgt also, dass auch  $\overset{\circ}{Q}$  messbar ist mit

$$\text{vol}(\overset{\circ}{Q}) = \text{vol}(Q) - \text{vol}(\partial Q) = \text{vol}(Q),$$

d. h. das Herausnehmen des Randes ändert nichts an der Messbarkeit oder am Volumen des Quaders.

- (b) Vergrößern wir  $Q$  etwas zu einem offenen Quader über seine Kanten hinaus, so vergrößert sich dadurch sein Volumen nur wenig: Setzen wir

$$R_\delta = [a_1 - \delta, b_1 + \delta] \times \cdots \times [a_n - \delta, b_n + \delta] \quad \text{für } \delta \in \mathbb{R}_{>0},$$

so gilt  $Q \subset R_\delta$  für alle  $\delta$ , und wegen der Stetigkeit der Funktion  $\delta \mapsto \text{vol}(R_\delta)$  gibt es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\text{vol}(R_\delta) < \text{vol}(Q) + \varepsilon$ .

**Aufgabe 29.12.** Zeige, dass das Riemann-Integral *translationsinvariant* ist: Sind  $f$  eine integrierbare Funktion auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ , so ist auch die Funktion  $x \mapsto f(x - a)$  auf der Menge  $D + a := \{x + a : x \in D\}$  integrierbar, und es gilt

$$\int_{D+a} f(x - a) dx = \int_D f(x) dx.$$

**Aufgabe 29.13** (Offene, abgeschlossene bzw. kompakte Mengen müssen nicht messbar sein). Wir wissen nach Beispiel 5.58 (a), dass die Menge  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  abzählbar ist. Es sei nun also  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine solche Abzählung.

- (a) Zeige, dass die Menge

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( q_n - \frac{1}{2^{n+3}}, q_n + \frac{1}{2^{n+3}} \right) \subset \mathbb{R}$$

offen und nicht messbar ist.

- (b) Finde eine kompakte (und damit auch abgeschlossene) Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die nicht messbar ist.

(Hinweis: Da die obigen Intervalle nur eine Gesamtlänge von  $\frac{1}{2}$  haben, kann  $D$  ja wohl nicht das ganze Einheitsintervall  $[0, 1]$  überdecken. Andererseits enthält  $D$  aber um jede rationale Zahl noch ein offenes Intervall und muss damit doch eigentlich auch alle irrationalen Zahlen in  $[0, 1]$  enthalten, also doch das ganze Intervall  $[0, 1]$  überdecken? Wo ist der Denkfehler?)

## 29.B Nullmengen

Von besonderer Bedeutung sind messbare Mengen, deren Volumen gleich 0 ist: Sie spielen nicht nur bei der Volumenberechnung, sondern auch — wie wir gleich sehen werden — bei Integralen keine Rolle, so dass sie dabei also beliebig hinzugefügt oder weggelassen werden können, bzw. die zu integrierende Funktion dort beliebig abgeändert werden kann, ohne etwas an der Integrierbarkeit oder dem Wert des Integrals zu ändern. Wir wollen derartige Mengen jetzt genauer untersuchen.

**Definition 29.14** (Nullmengen). Eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine **(Jordan-)Nullmenge**, wenn sie messbar ist mit  $\text{vol}(N) = 0$ .

**Lemma 29.15** (Äquivalente Kriterien für Nullmengen). Für eine beschränkte Teilmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- (a)  $N$  ist eine Nullmenge.  
 (b) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $Z$  eines Quaders  $[a, b] \supset N$  mit

$$\sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \cap N \neq \emptyset} \text{vol}(Q) < \varepsilon.$$

(c) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es endlich viele Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  mit

$$N \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

(d) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es endlich viele Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  mit

$$N \subset \overset{\circ}{Q}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{Q}_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

*Beweis.*

(a)  $\Rightarrow$  (b): Nach Voraussetzung ist die Indikatorfunktion  $1_N$  über einen Quader  $[a, b] \supset N$  integrierbar mit Integral 0. Dies bedeutet nach dem Riemannsches Integrierbarkeitskriterium aus Lemma 28.10 (b), dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt mit

$$\text{OS}(1_N, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot \sup 1_N(Q) < \varepsilon.$$

Da dieses Supremum aber gerade 1 ist falls  $Q \cap N \neq \emptyset$ , und 0 sonst, folgt damit schon die Behauptung (b).

(b)  $\Rightarrow$  (c): Dies ist klar, da wir für  $Q_1, \dots, Q_k$  einfach die Teilquader  $Q$  mit  $Q \cap N \neq \emptyset$  der aus (b) vorausgesetzten Zerlegung nehmen können.

(c)  $\Rightarrow$  (d): Nach Voraussetzung gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  mit  $N \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k$  und  $\sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wie in Beispiel 29.11 (b) vergrößern wir nun jeden dieser Quader  $Q_i$  zu einem Quader  $R_i$  mit  $Q_i \subset R_i$  und  $\text{vol}(R_i) < \text{vol}(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2k}$ . Dann überdecken die offenen Quader  $\overset{\circ}{R}_1, \dots, \overset{\circ}{R}_k$  die Menge  $N$ , und es gilt

$$\sum_{i=1}^k \text{vol}(R_i) < \sum_{i=1}^k \left( \text{vol}(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2k} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

(d)  $\Rightarrow$  (a): Wir zeigen mit dem Riemannsches Integrierbarkeitskriterium aus Lemma 28.10 (b), dass das Integral über die Indikatorfunktion  $1_N$  existiert und gleich 0 ist. Es sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Nun seien  $Q_1, \dots, Q_k$  Quader wie in (d). Wir wählen einen Quader  $[a, b]$ , der  $Q_1, \dots, Q_k$  enthält, und betrachten die von  $Q_1, \dots, Q_k$  induzierte Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  wie in Konstruktion 29.3. Da  $N$  vollständig in  $\overset{\circ}{Q}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{Q}_k$  enthalten ist, ist die Indikatorfunktion  $1_N$  höchstens auf den Teilquadern  $Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k$  nicht identisch 0, und dort ist ihr Supremum dann höchstens gleich 1. Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{OS}(1_N, Z) &= \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot \sup 1_N(Q) \leq \sum_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z): \\ Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k}} \text{vol}(Q) \\ &= \text{vol}(Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \stackrel{29.10(c)}{\leq} \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da die Ungleichung  $\text{US}(1_N, Z) \geq 0$  wegen  $1_N \geq 0$  offensichtlich ist, ist damit die Integrierbarkeit von  $1_N$  gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 29.16** (Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen). Insbesondere folgt aus der Charakterisierung (c) von Nullmengen aus Lemma 29.15, dass jede Teilmenge  $A$  einer Nullmenge  $N$  wieder eine Nullmenge ist — denn Quader, die  $N$  überdecken, überdecken dann natürlich auch  $A$ .

Ein weiteres Nullmengenkriterium, das aus Lemma 29.15 folgt und sehr viele Nullmengen als solche erkennen kann, ist das folgende.

**Folgerung 29.17** (Graphen integrierbarer Funktionen sind Nullmengen). *Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist der Graph*

$$N := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

von  $f$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

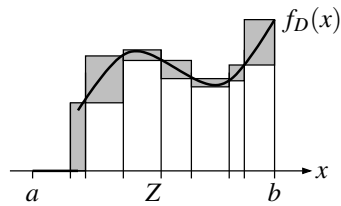
*Beweis.* Es sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $f_D$  nach Voraussetzung auf einem Quader  $[a, b] \supset D$  integrierbar ist, gibt es nach dem Riemannschem Integritätskriterium aus Lemma 28.10 (a) eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ , so dass

$$OS(f_D, Z) - US(f_D, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot (\sup f_D(Q) - \inf f_D(Q)) < \varepsilon.$$

Dies ist aber gerade die Summe der Volumina der rechts im Bild grau eingezeichneten Quader

$$Q \times [\inf f_D(Q), \sup f_D(Q)]$$

für  $Q \in \text{TQ}(Z)$ , die offensichtlich den Graphen von  $f_D$  und damit auch den von  $f$  überdecken. Also ist  $N$  nach dem Kriterium aus Lemma 29.15 (c) eine Nullmenge. □



**Beispiel 29.18.** Die Kreislinie  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$  ist nach Bemerkung 29.10 (c) und Folgerung 29.17 eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ , da sie die Vereinigung der Graphen der beiden stetigen und damit integrierbaren Funktionen  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2}$  ist.

Allgemein kann man sich die Graphen von (integrierbaren) Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^n$  anschaulich als „ $n$ -dimensionale Objekte“ in  $\mathbb{R}^{n+1}$  vorstellen, denen man daher das  $(n+1)$ -dimensionale Volumen 0 zuordnen kann.

**Aufgabe 29.19.** Zeige, dass jede beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die nur endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Nullmenge ist.

**Aufgabe 29.20.** Es seien  $A \subset B \subset C$  beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Man zeige: Sind  $A$  und  $C$  messbar mit  $\text{vol}(C) = \text{vol}(A)$ , so ist auch  $B$  messbar mit  $\text{vol}(B) = \text{vol}(A)$ .

**Aufgabe 29.21.** Es sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeige, dass dann die Menge  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \|x\|_2 = r_n\}$  eine Nullmenge ist.

Nachdem wir von einer gegebenen Menge nun gut nachprüfen können, ob sie eine Nullmenge ist, wollen wir jetzt wie bereits angekündigt sehen, dass Nullmengen nicht nur beim Volumen, sondern auch bei der Integration beliebiger (beschränkter) Funktionen keine Rolle spielen.

**Satz 29.22** (Integrale über Nullmengen sind 0). *Jede beschränkte Funktion  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  ist integrierbar mit  $\int_N f(x) dx = 0$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Integrierbarkeit und den Wert des Integrals mit dem Riemannschem Integritätskriterium aus Lemma 28.10 (b).

Da  $f$  beschränkt ist, gibt es ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $|f(x)| \leq c$  für alle  $x \in N$ . Weiterhin ist  $N$  eine Nullmenge, und damit gibt es nach Lemma 29.15 (b) eine Zerlegung  $Z$  eines Quaders  $[a, b] \supset N$ , so dass die  $N$  schneidenden Teilquader von  $Z$  ein Gesamtvolumen kleiner als  $\frac{\varepsilon}{c}$  haben. Dann gilt aber

$$OS(f_N, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot \sup f_N(Q) \leq \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \cap N \neq \emptyset} \text{vol}(Q) \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon,$$

da das Supremum auf den Teilquadern  $Q$  mit  $Q \cap N = \emptyset$  gleich 0 und auf allen anderen höchstens gleich  $c$  ist. Analog zeigt man  $US(f_N, Z) > -\varepsilon$ , so dass die Behauptung des Satzes aus Lemma 28.10 (b) folgt. □

**Notation 29.23** („fast überall“). Man sagt, eine von einem Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  abhängige Eigenschaft gilt **fast überall**, wenn es eine Nullmenge  $N$  gibt, so dass die Eigenschaft für alle  $a \notin N$  gilt. So sagt man z. B. für zwei Funktionen  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ :



- $f = g$  fast überall, wenn es eine Nullmenge  $N \subset D$  gibt mit  $f|_{D \setminus N} = g|_{D \setminus N}$ ;
- $f$  ist fast überall stetig, wenn es eine Nullmenge  $N \subset D$  gibt, so dass  $f$  in jedem Punkt von  $D \setminus N$  stetig ist.

Wir können Satz 29.22 damit also so umformulieren: Ist  $f$  eine beschränkte Funktion, die fast überall gleich 0 ist, so ist  $f$  integrierbar mit Integral 0.

**Bemerkung 29.24.** Für viele Aussagen über Integrale reicht es aufgrund von Satz 29.22 aus, wenn die von den beteiligten Funktionen geforderten Voraussetzungen nur fast überall gelten. Hier sind zwei Beispiele dafür:

- (a) Es seien  $f, \tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Ist dann  $f$  integrierbar und gilt fast überall  $\tilde{f} = f$ , so ist auch  $\tilde{f}$  integrierbar mit  $\int_D \tilde{f}(x) dx = \int_D f(x) dx$ : Dann ist nämlich  $\tilde{f} - f$  beschränkt und nur auf einer Nullmenge ungleich 0, nach Satz 29.22 also integrierbar mit Integral 0 — und damit ergibt sich die Behauptung mit der Formel

$$\int_D \tilde{f}(x) dx = \int_D f(x) dx + \int_D (\tilde{f}(x) - f(x)) dx$$

aus Folgerung 29.7 (a).

- (b) Sind  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei integrierbare Funktionen auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und gilt fast überall  $f \leq g$ , so ist  $\int_D f(x) dx \leq \int_D g(x) dx$ : Dann können wir  $f$  und  $g$  nämlich nach (a) ohne Änderung ihrer Integrale auf der Nullmenge, auf der nicht  $f \leq g$  gilt, gleich 0 setzen. Damit gilt aber überall  $f \leq g$ , und die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 29.7 (c).

In dieses Schema passt auch gut der folgende zentrale Satz, dass eine fast überall stetige Funktion auf einem Quader integrierbar ist — da wir ja in Satz 12.12 gesehen haben, dass dies für überall stetige Funktionen gilt. Beachte jedoch, dass diese Aussage nicht wie die in Bemerkung 29.24 direkt aus Satz 29.22 folgt, da es in der Regel nicht möglich ist, eine fast überall stetige Funktion so auf einer Nullmenge abzuändern, dass sie überall stetig wird.

**Satz 29.25 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium für Quader).** Jede beschränkte, fast überall stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Quader  $[a, b]$  ist integrierbar.

*Beweis.* Wir zeigen den Satz mit dem Riemannsches Integrierbarkeitskriterium aus Lemma 28.10 (a). Es sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach den Voraussetzungen an  $f$  gibt es ferner ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $|f(x)| \leq c$  für alle  $x \in [a, b]$  sowie eine Nullmenge  $N \subset [a, b]$ , so dass  $f$  in jedem Punkt von  $[a, b] \setminus N$  stetig ist. Wir konstruieren nun eine offene Überdeckung des Quaders  $[a, b]$  und setzen dazu  $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2c + \text{vol}([a, b])}$ .

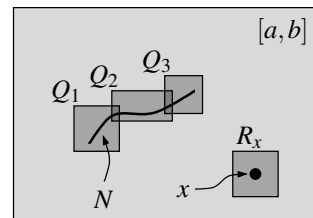
- Weil  $N$  eine Nullmenge ist, gibt es nach Lemma 29.15 (d) wie im Bild rechts Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  mit

$$\sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \varepsilon', \tag{1}$$

deren Inneres die Menge  $N$  überdeckt.

- Für jeden Punkt  $x \in [a, b] \setminus N$  hingegen ist  $f$  stetig in  $x$ , und damit gibt es einen Quader  $R_x$  mit Mittelpunkt  $x$ , so dass

$$\sup f(R_x \cap [a, b]) - \inf f(R_x \cap [a, b]) < \varepsilon'. \tag{2}$$



Die offenen Quader  $\overset{\circ}{Q}_1, \dots, \overset{\circ}{Q}_k$  sowie  $\overset{\circ}{R}_x$  für alle  $x \in [a, b] \setminus N$  überdecken nun nach Konstruktion die kompakte Menge  $[a, b]$ . Nach dem Satz 23.57 von Heine-Borel können wir hieraus also eine endliche Teilüberdeckung wählen, d. h. es ist  $[a, b] \subset \overset{\circ}{Q}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{Q}_k \cup \overset{\circ}{R}_{x_1} \cup \dots \cup \overset{\circ}{R}_{x_l}$  für gewisse  $x_1, \dots, x_l \in [a, b] \setminus N$ . Es sei  $Z$  die von diesen Quadern  $Q_1, \dots, Q_k, R_{x_1}, \dots, R_{x_l}$  induzierte Zerlegung

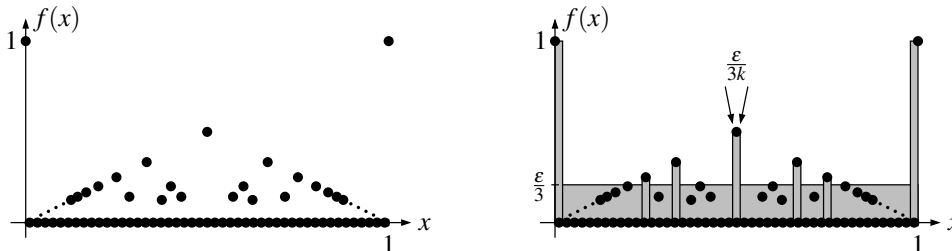
wie in Konstruktion 29.3. Dann liegt jeder Teilquader  $Q \in \text{TQ}(Z)$  in einem  $Q_i$  für  $i = 1, \dots, k$  oder  $R_{x_j}$  für  $j = 1, \dots, l$ , und damit folgt

$$\begin{aligned} \text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) &= \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot (\sup f(Q) - \inf f(Q)) \\ &\leq \underbrace{\sum_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z): \\ Q \subset Q_i \text{ für ein } i}} \text{vol}(Q)}_{=\text{vol}(Q_1 \cup \dots \cup Q_k) < \varepsilon' \text{ nach (1)}} \cdot \underbrace{(\sup f(Q) - \inf f(Q))}_{\leq 2c} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z): \\ Q \subset R_{x_j} \text{ für ein } j}} \text{vol}(Q)}_{\leq \text{vol}([a,b])} \cdot \underbrace{(\sup f(Q) - \inf f(Q))}_{< \varepsilon' \text{ nach (2)}} \\ &< (2c + \text{vol}([a,b])) \cdot \varepsilon' = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 29.26** (Stückweise stetige Funktionen). Wir hatten in Beispiel 12.16 bereits gesehen, dass jede stückweise stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  integrierbar ist. Diese Aussage ist offensichtlich ein Spezialfall von Satz 29.25, da die Menge der Punkte, an denen eine solche Funktion unstetig ist, endlich und damit natürlich eine Nullmenge ist.

**Beispiel 29.27** (Die Umkehrung des Lebesgueschen Integrierbarkeitskriteriums gilt nicht). Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz 29.25 falsch ist: Wie im Bild unten links schematisch dargestellt sei

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ mit gekürzter Darstellung } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_{>0}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Dann ist  $f$  nach dem Riemannsches Integrierbarkeitskriterium aus Lemma 12.11 (b) integrierbar mit Integral 0: Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es wie im Bild rechts nur endlich viele  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$  mit Funktionswert größer als  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Wählen wir eine Zerlegung  $Z$  von  $[0, 1]$ , die um jeden dieser Punkte ein Intervall der Länge höchstens  $\frac{\varepsilon}{3k}$  enthält, so erhält die Obersumme  $\text{OS}(f, Z)$  von diesen Intervallen einen Beitrag von höchstens  $k \cdot \frac{\varepsilon}{3k} = \frac{\varepsilon}{3}$ , und der Beitrag der übrigen Intervalle ist ebenfalls höchstens  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Insgesamt ist dann also  $\text{OS}(f, Z) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ , so dass die Integrierbarkeit von  $f$  mit Integral 0 aus Lemma 12.11 (b) folgt.

Die Funktion  $f$  ist jedoch an allen rationalen Punkten unstetig, weil in jeder Umgebung eines solchen Punktes auch irrationale Zahlen und damit Punkte mit Funktionswert 0 liegen. Da  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  nach Beispiel 29.6 (b) aber keine Nullmenge ist, ist  $f$  damit nicht fast überall stetig. Dieses Beispiel zeigt also, dass die Umkehrung von Satz 29.25 nicht gilt.

Man kann jedoch zeigen, dass die Umkehrung von Satz 29.25 richtig wird, wenn man im Gegensatz zu Lemma 29.15 auch solche Mengen als Nullmengen bezeichnet, für die es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Überdeckung durch *abzählbar viele* Quader mit Volumensumme kleiner als  $\varepsilon$  gibt [M, Satz 45.13]. Man spricht in diesem Fall auch von *Lebesgue-Nullmengen* im Gegensatz zu unseren Jordan-Nullmengen. So ist dann z. B. jede abzählbare Menge, also z. B.  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , trivialerweise eine Lebesgue-Nullmenge, da sie die abzählbare Vereinigung aller ihrer Punkte, also von Quadern mit Volumen 0 ist.

Man sagt dann auch, dass eine Eigenschaft *Lebesgue-fast überall* gilt, wenn sie an jedem Punkt mit Ausnahme einer Lebesgue-Nullmenge gilt. Die Form, in der man das Lebesguesche Integrabilitätskriterium in der Literatur oft findet, ist also: Eine beschränkte Funktion auf einem Quader ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie Lebesgue-fast überall stetig ist. Wir werden diese allgemeinere Aussage im Folgenden aber nicht benötigen.

Als erste wichtige Folgerung von Satz 29.25 wollen wir nun ein Kriterium beweisen, mit dem man in der Regel einfach überprüfen kann, ob eine gegebene Menge messbar ist.

**Folgerung 29.28** (messbar  $\Leftrightarrow$  Rand ist Nullmenge). *Eine beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann messbar, wenn ihr Rand  $\partial A$  eine Nullmenge ist.*

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ Ist  $A$  messbar, die Indikatorfunktion  $1_A$  also über einen Quader  $[a, b] \supset A$  integrierbar, so gibt es nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (a) zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit

$$OS(1_A, Z) - US(1_A, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot \underbrace{(\sup 1_A(Q) - \inf 1_A(Q))}_{(*)} < \varepsilon.$$

Offensichtlich gilt für dieses Supremum und Infimum

$$\sup 1_A(Q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Q \cap A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } Q \cap A = \emptyset \end{cases}$$

und  $\inf 1_A(Q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset, \\ 1 & \text{falls } Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset. \end{cases}$

Also ist die Differenz (\*) nur dann ungleich 0, und zwar dann gleich 1, wenn  $Q \cap A \neq \emptyset$  und  $Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$  gilt, also wenn  $Q$  sowohl einen Punkt in  $A$  als auch einen Punkt nicht in  $A$  enthält. Sind  $Q_1, \dots, Q_k$  diese Teilquader von  $Z$ , so ist deren Volumensumme also kleiner als  $\varepsilon$ .

Gleichzeitig überdecken diese Teilquader aber auch den Rand  $\partial A$ : Ist  $a \in \partial A$ , so wählen wir eine offene Umgebung von  $a$ , die keine weiteren Teilquader außer denen trifft, in denen  $a$  liegt: Diese Umgebung enthält dann nach Definition 23.35 (a) einen Punkt  $b$ , so dass von den Punkten  $a$  und  $b$  genau einer in  $A$  liegt. Nach Wahl der Umgebung liegt  $b$  nun in einem Teilquader von  $Z$ , in dem auch  $a$  liegt, und der demzufolge in den  $Q_1, \dots, Q_k$  enthalten ist.

Also ist  $\partial A$  nach Lemma 29.15 (c) eine Nullmenge.

„ $\Leftarrow$ “ Die Indikatorfunktion  $1_A$  ist genau am Rand  $\partial A$  unstetig. Ist dieser also eine Nullmenge, so ist  $1_A$  nach Satz 29.25 integrierbar, d. h.  $A$  ist messbar.  $\square$

### Beispiel 29.29.

- Die Kreisscheibe  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  ist nach Folgerung 29.28 messbar, da ihr Rand  $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$  nach Beispiel 29.18 eine Nullmenge ist.
- Wir wussten bereits aus Beispiel 29.6 (b), dass die Menge  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  nicht messbar ist. Alternativ sieht man dies nun leicht mit Folgerung 29.28, da der Rand  $\partial A = [0, 1]$  Volumen 1 hat und damit keine Nullmenge ist.
- Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  messbar, so kann man beliebig zu  $A$  Randpunkte hinzunehmen oder von  $A$  wegnehmen, ohne etwas an der Messbarkeit oder dem Volumen zu ändern: Nach Bemerkung 29.16 und Folgerung 29.28 ist jede Teilmenge  $B$  von  $\partial A$  eine Nullmenge, und damit sind nach Folgerung 29.9 auch  $A \cup B$  und  $A \setminus B$  messbar mit  $\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A \setminus B) = \text{vol}(A)$ .

Verbindet man die Ergebnisse von Satz 29.25 und Folgerung 29.28 miteinander, so erhält man die folgende Aussage, mit der man für die meisten in der Praxis auftretenden Funktionen sofort sehen kann, dass sie integrierbar sind.

**Folgerung 29.30 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium für messbare Mengen).** Jede beschränkte, fast überall stetige Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer messbaren Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist integrierbar.

*Beweis.* Es sei  $N \subset D$  eine Nullmenge, so dass  $f$  in jedem Punkt von  $D \setminus N$  stetig ist. Dann ist die Funktion  $f_D$  auf einem Quader  $[a, b] \supset D$  höchstens in den Punkten von  $N \cup \partial D$  unstetig. Da  $\partial D$  aber nach Folgerung 29.28 eine Nullmenge ist, gilt dies nach Bemerkung 29.10 (c) auch für  $N \cup \partial D$ . Nach Satz 29.25 ist also  $f_D$  auf  $[a, b]$ , und damit nach Definition auch  $f$  auf  $D$  integrierbar.  $\square$

**Aufgabe 29.31.** Untersuche, ob die folgenden Mengen messbar sind, und bestimme im Fall der Messbarkeit ihr Volumen:

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $A \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$  für eine beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^m$  und eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 29.32.** Es seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktionen auf einer beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $A \subset D$  eine messbare Teilmenge von  $D$ . Zeige, dass  $f$  dann auch auf  $A$  integrierbar ist.

**Aufgabe 29.33 (Integrale als Volumen zwischen Graphen).** Es seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine messbare Menge und  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei beschränkte stetige Funktionen mit  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D$ . Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in D, f(x) \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von  $f$  und  $g$  messbar ist mit  $\text{vol}(M) = \int_D (g(x) - f(x)) dx$ .

## 29.C Normalbereiche

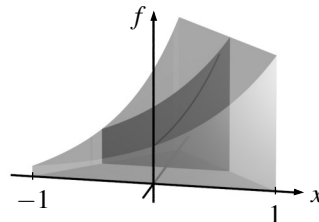
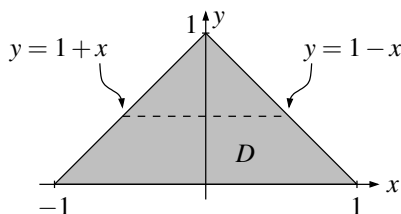
Wir haben uns inzwischen gute Kriterien erarbeitet, mit denen wir überprüfen können, ob eine gegebene Menge messbar bzw. eine Nullmenge, und ob eine gegebene Funktion integrierbar ist. Natürlich müssen wir nun aber auch noch untersuchen, wie man diese Volumina bzw. Integrale im Fall der Existenz dann auch berechnen kann.

Die erfreuliche Nachricht hierzu ist, dass wir dies bereits können — der Satz 28.16 von Fubini liefert uns schon alles, was wir dazu benötigen. Um dies zu sehen, beginnen wir am besten mit einem Beispiel.

**Beispiel 29.34.** Wir wollen das Integral

$$\int_D f(x, y) d(x, y)$$

über das links unten eingezeichnete Dreieck  $D$ , also wie im Bild rechts das Volumen unter dem Graphen von  $f(x, y) := e^{x+y}$  über  $D$  berechnen.



Beachte zunächst, dass dieses Integral existiert: Der Rand  $\partial D$  ist eine Vereinigung aus den beiden Funktionsgraphen zu  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  und  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - |x|$  und damit nach Bemerkung 29.10 (c) und Folgerung 29.17 eine Nullmenge. Also ist  $D$  nach Folgerung 29.28 messbar, und die stetige Funktion  $f$  darauf nach dem Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium aus Folgerung 29.30 integrierbar.

Nach Definition 29.5 (a) ist das gesuchte Integral nun gleich  $\int_Q f_D(x,y) d(x,y)$  für einen beliebigen Quader  $Q \supset D$  — wir können hier  $Q = [-1, 1] \times [0, 1]$  wählen. Da dieses Integral existiert, sagt uns der Satz 28.16 von Fubini also, dass

$$\int_D e^{x+y} d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 f_D(x,y) dx \right) dy,$$

zumindest sofern auch das innere Integral existiert (was wir gleich durch eine explizite Berechnung dieses Integrals sehen werden).

Um dieses innere Integral auszuwerten, betrachten wir nun ein festes  $y \in [0, 1]$  — so wie auf der gestrichelten Linie im Bild oben links bzw. auf der dunklen Fläche im Bild oben rechts. Die Funktion  $x \mapsto f_D(x,y)$  stimmt dort nach Definition mit  $f$  überein, wenn  $(x,y) \in D$  liegt, und ist sonst gleich 0. Da die diagonalen Seitenlinien von  $D$  durch die Gleichungen  $y = 1 + x$  bzw.  $y = 1 - x$  gegeben sind, stimmt  $f_D$  für unser festes  $y$  also genau zwischen  $x = y - 1$  und  $x = 1 - y$  mit  $f$  überein. Das innere Integral ist demnach ein Integral über  $f$  zwischen  $y - 1$  und  $1 - y$ , und wir erhalten so

$$\int_D e^{x+y} d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{1-y} e^{x+y} dx \right) dy.$$

Wir haben die spezielle Form von  $D$  also letztlich dadurch berücksichtigt, dass wir die Integrationsgrenzen angepasst haben — und zwar so, dass die Grenzen des inneren Integrals über  $x$  von der äußeren Integrationsvariable  $y$  abhängen und angeben, für welche  $x$  bei festem  $y$  der betrachtete Punkt in  $D$  liegt.

Der Rest der Rechnung lässt sich nun problemlos mit unseren eindimensionalen Methoden aus Kapitel 12 durchführen: Wir erhalten als Endergebnis

$$\int_0^1 \left( \int_{y-1}^{1-y} e^{x+y} dx \right) dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_{x=y-1}^{x=1-y} dy = \int_0^1 (e - e^{2y-1}) dy = [ey - \frac{1}{2}e^{2y-1}]_0^1 = \frac{1}{2}(e + e^{-1}).$$

75

Wir wollen diese Idee zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale nun noch zu einem allgemeinen Kriterium ausbauen. Dies hat den Vorteil, dass wir im Fall der Anwendbarkeit dieses Kriteriums im Gegensatz zum obigen Beispiel dann keinerlei Integrierbarkeitsvoraussetzungen mehr überprüfen, sondern nur noch die eigentliche Rechnung durchführen müssen. Die Gebiete, für die dies am einfachsten möglich ist, sind die sogenannten Normalbereiche. Diese Normalbereiche sind also lediglich als Hilfsmittel für Berechnungen zu verstehen; sie haben in der Mathematik keine theoretische Bedeutung.

**Definition 29.35** (Normalbereiche). Ein ( $n$ -dimensionaler) **Normalbereich** in  $\mathbb{R}^n$  ist rekursiv über  $n$  wie folgt definiert:

- (a) Für  $n = 1$  ist ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall  $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$  mit  $a_1 \leq b_1$ .
- (b) Für  $n > 1$  ist ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^n$  eine Menge der Form

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in M \text{ und } a_n(x) \leq y \leq b_n(x)\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n,$$

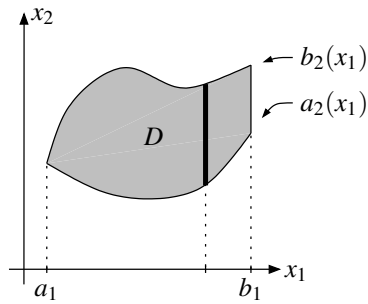
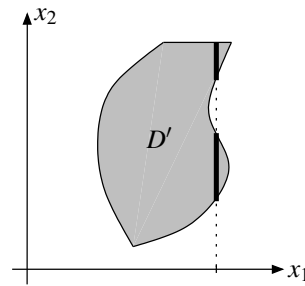
wobei  $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Normalbereich und  $a_n, b_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $a_n(x) \leq b_n(x)$  für alle  $x \in M$  sind.

**Beispiel 29.36.**

- (a) Für  $n = 2$  ist ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^2$  also von der Form

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ und } a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

für gewisse  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 \leq b_1$  und stetige Funktionen  $a_2, b_2 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a_2 \leq b_2$ . Anschaulich wird  $D$  also wie im Bild unten links dadurch beschrieben, dass  $x_1$  zwischen den Grenzen  $a_1$  und  $b_1$  läuft, während  $x_2$  dann für ein solches festes  $x_1 \in [a_1, b_1]$  zwischen den (von  $x_1$  abhängenden) Grenzen  $a_2$  und  $b_2$ , also wie im Bild durch die dicke Linie angedeutet im Intervall  $[a_2(x_1), b_2(x_1)]$  variiert.

Normalbereich bezüglich  $(x_1, x_2)$ kein Normalbereich bezüglich  $(x_1, x_2)$ , aber  
Normalbereich bezüglich  $(x_2, x_1)$ 

Spiegelt man diese Menge  $D$  an der Diagonalen, vertauscht man also wie im Bild oben rechts die beiden Koordinaten, so ist die daraus resultierende Menge  $D'$  in diesem Fall jedoch nach unserer Definition kein Normalbereich mehr, denn für den eingezeichneten Wert von  $x_1$  variiert  $x_2$  in  $D'$  (wie durch die dicken Linien dargestellt) nicht in einem Intervall, sondern in zwei disjunkten Intervallen. Dagegen könnte man diese gespiegelte Menge aber natürlich durch Vertauschen der Variablen wieder wie oben in der Form

$$D' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_2 \leq x_2 \leq b_2 \text{ und } a_1(x_2) \leq x_1 \leq b_1(x_2)\} \subset \mathbb{R}^2$$

schreiben, in der nun zunächst  $x_2$  zwischen zwei Grenzen  $a_2$  und  $b_2$ , und  $x_1$  dann für ein festes  $x_2$  in einem Intervall  $[a_1(x_2), b_1(x_2)]$  variiert. Will man dies ausdrücken, so sagt man, dass z. B. die Mengen in  $\mathbb{R}^2$  mit der Eigenschaft aus Definition 22.23 wie im Bild oben links *Normalbereiche bezüglich der Variablenordnung*  $(x_1, x_2)$  sind, während die Menge  $D'$  wie im Bild oben rechts ein Normalbereich bezüglich der Variablenordnung  $(x_2, x_1)$  ist. Um die Notationen einfach zu halten, werden wir Normalbereiche in  $\mathbb{R}^n$  im Folgenden immer als Normalbereiche bezüglich  $(x_1, \dots, x_n)$  annehmen; analoge Aussagen gelten aber natürlich auch für jede andere Variablenordnung.

(b) Für allgemeines  $n$  hat ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^n$  analog die Form

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \\ a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1), \dots, \\ a_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

für stetige Funktionen  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  in den entsprechenden Variablen mit  $a_i \leq b_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Das Gebiet muss sich also so beschreiben lassen, dass der Laufbereich jeder Variablen ein Intervall ist, dessen Grenzen nur von den vorherigen Variablen abhängt.

Wir wollen nun zeigen, dass stetige Funktionen auf Normalbereichen immer integrierbar sind, und dass sich ihre Integrale wie in Beispiel 29.34 als mehrfache eindimensionale Integrale berechnen lassen. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

**Lemma 29.37.** *Jeder Normalbereich ist kompakt und messbar.*

*Beweis.* Es sei  $D$  ein  $n$ -dimensionaler Normalbereich in  $\mathbb{R}^n$ . Wir zeigen die Aussage mit Induktion über  $n$ . Der Induktionsanfang ist dabei klar, denn für  $n = 1$  ist  $D$  ein abgeschlossenes Intervall, also kompakt nach Beispiel 23.51 und messbar nach Beispiel 29.6 (a).

Für den Induktionsschritt sei  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in M \text{ und } a_n(x) \leq y \leq b_n(x)\}$  wie in Definition 29.35 (b), wobei  $M$  ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist. Nach Satz 23.50 (b) genügt es zu zeigen, dass  $D$  beschränkt, abgeschlossen und messbar ist.

- $D$  ist beschränkt: Der Normalbereich  $M$  ist nach Induktionsvoraussetzung kompakt. Die stetigen Funktionen  $a_n$  und  $b_n$  nehmen auf dieser kompakten Menge nach Folgerung 24.24 also ein Minimum  $c$  bzw. Maximum  $d$  an. Da  $M$  als kompakte Menge nach Satz 23.50 (a) beschränkt ist, ist damit auch  $D \subset M \times [c, d]$  beschränkt.

- $D$  ist abgeschlossen: Wir zeigen dies mit dem Folgenkriterium für Abgeschlossenheit aus Satz 23.40. Es sei also  $(x_k, y_k)_k \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $(x, y)$ , deren Folgenglieder in  $D$  liegen. Da  $M$  nach Induktionsvoraussetzung kompakt und damit abgeschlossen ist, ist mit  $x_k \in M$  für alle  $k$  dann auch  $x \in M$ . Bilden wir weiterhin in der Ungleichung  $a_n(x_k) \leq y_k \leq b_n(x_k)$  den Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$ , so erhalten wir wegen der Stetigkeit von  $a_n$  und  $b_n$  mit Satz 24.4 (b) auch die Ungleichung  $a_n(x) \leq y \leq b_n(x)$ , also insgesamt  $(x, y) \in D$ . Damit ist  $D$  abgeschlossen.
- $D$  ist messbar: Dies folgt unmittelbar aus Aufgabe 29.33. □

**Folgerung 29.38 (Satz von Fubini für Normalbereiche).** *Wie in Beispiel 29.36 (b) sei*

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \\ a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1), \dots, \\ a_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

ein Normalbereich in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist jede auf  $D$  stetige Funktion  $f$  integrierbar, und ihr Integral lässt sich als  $n$ -faches eindimensionales Integral

$$\int_D f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \left( \dots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

berechnen.

*Beweis.* Auch diese Aussage beweisen wir wieder mit Induktion über  $n$ ; für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen.

Da  $D$  nach Lemma 29.37 kompakt und damit beschränkt ist, können wir für den Induktionsschritt im Fall  $n > 1$  einen Quader der Form  $[a_1, b_1] \times Q$  mit  $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$  wählen, der  $D$  enthält. Wir wollen nun den Satz 28.16 von Fubini für Quader auf die Funktion  $f_D$  auf  $[a_1, b_1] \times Q$  wie in Definition 29.1 (a) anwenden und müssen daher die Voraussetzungen dieses Satzes überprüfen:

- Die Funktion  $f$  ist nach Voraussetzung auf der gemäß Lemma 29.37 kompakten Menge  $D$  stetig und nach Folgerung 24.24 damit beschränkt. Da  $D$  nach Lemma 29.37 außerdem messbar ist, ist  $f$  nach dem Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium aus Folgerung 29.30 integrierbar.
- Betrachten wir für ein festes  $x_1 \in [a_1, b_1]$  die Menge

$$D_{x_1} := \{(x_2, \dots, x_n) \in Q : (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

aller Punkte von  $D$  mit diesem festen  $x_1$ -Wert, so ist dies ein  $(n - 1)$ -dimensionaler Normalbereich. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Funktion  $(x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  also auf  $D_{x_1}$  integrierbar mit

$$\int_Q f_D(x_1, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) = \int_{D_{x_1}} f(x_1, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) \\ = \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \left( \dots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots \right) dx_2.$$

Damit erhalten wir nun wie behauptet

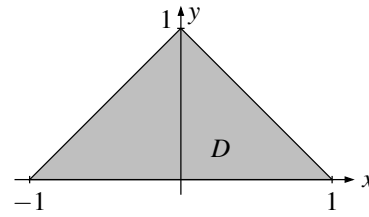
$$\int_D f(x) dx = \int_{[a_1, b_1] \times Q} f_D(x) dx \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_Q f_D(x_1, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) \right) dx_1 \quad (\text{Satz 28.16}) \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \left( \dots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots \right) dx_2 \right) dx_1. \quad \square$$

**Beispiel 29.39.** Das rechts abgebildete Dreieck können wir wie in Beispiel 29.34 als Normalbereich

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ und } y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$$

bezüglich  $(y, x)$  schreiben. Dementsprechend ist jede auf  $D$  stetige Funktion  $f$  nach Folgerung 29.38 integrierbar, und es gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy,$$



wie wir auch schon im obigen Beispiel gesehen haben. Genauso können wir  $D$  auch als Normalbereich

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$$

bezüglich  $(x, y)$  schreiben, und erhalten für jede stetige Funktion  $f$  auf  $D$  die analoge Formel

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-|x|} f(x, y) dy \right) dx$$

zur Berechnung des Integrals über  $f$  als doppeltes eindimensionales Integral.

**Beispiel 29.40 (Prinzip von Cavalieri).** Wie im Bild rechts seien  $D$  und  $D'$  zwei messbare Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , so dass für jedes feste  $x_1 \in \mathbb{R}$  die Mengen

$$D_{x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

$$\text{und } D'_{x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in D'\}$$

der Punkte von  $D$  bzw.  $D'$  mit diesem festen  $x_1$ -Wert messbar sind und das gleiche  $(n - 1)$ -dimensionale Volumen haben.



Dann haben auch  $D$  und  $D'$  dasselbe Volumen, denn nach dem Satz 28.16 von Fubini gilt

$$\text{vol}(D) = \int 1_D(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int 1_{D_{x_1}}(x) d(x_2, \dots, x_n) \right) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \text{vol}(D_{x_1}) dx_1$$

und analog dann natürlich auch

$$\text{vol}(D') = \int_{a_1}^{b_1} \text{vol}(D'_{x_1}) dx_1,$$

wobei  $a_1$  und  $b_1$  Grenzen für  $x_1$  sind, in denen  $D$  und  $D'$  enthalten sind. In der Literatur wird diese einfache Folgerung aus dem Satz von Fubini oft als das *Prinzip von Cavalieri* bezeichnet.

**Aufgabe 29.41.**

- (a) Berechne  $\text{vol}(D)$  für das Tetraeder  $D$ , das von den drei Koordinatenebenen und der durch die Gleichung  $x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2$  beschriebenen Ebene in  $\mathbb{R}^3$  begrenzt wird.
- (b) Berechne das Integral  $\int_D |y| \cdot \cos x d(x, y)$ , wobei  $D$  die durch die Gleichung  $4x^2 + y^2 \leq 4$  gegebene Ellipse in  $\mathbb{R}^2$  ist.

**29.D Uneigentliche Integrale**

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch uneigentliche Integrale analog zu Definition 12.27 konstruieren, also die bisher immer gemachte Voraussetzung fallen lassen, dass die Definitionsmenge und die zu integrierende Funktion beschränkt sind. Wie auch schon im Eindimensionalen werden wir dies natürlich tun, indem wir z. B. ein Integral über einen unbeschränkten Bereich als Grenzwert von Integralen über immer größer werdende beschränkte Bereiche definieren. Im Gegensatz zu Kapitel 12 ist die exakte Formulierung dieser Idee im Mehrdimensionalen aber etwas



komplizierter, da es in  $\mathbb{R}^n$  sehr viele ganz unterschiedlich geformte unbeschränkte Gebiete gibt und ein solches uneigentliches Integral daher nicht einfach als Integral mit „Obergrenze  $\infty$ “ aufgefasst werden kann. Wir müssen daher zunächst einmal exakt definieren, was wir darunter verstehen wollen, dass „immer größer werdende beschränkte Bereiche eine gegebene Menge annähern“.

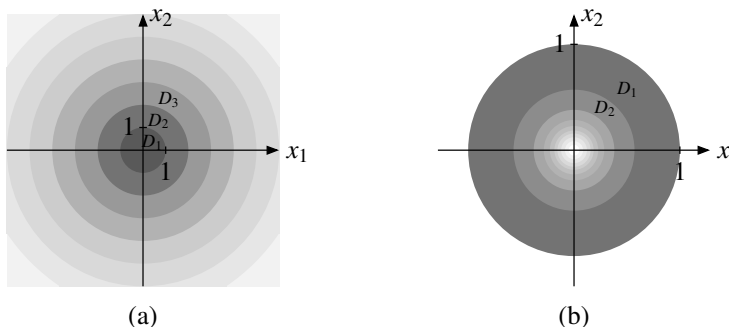
**Definition 29.42** (Ausschöpfende Folgen). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge. Eine **ausschöpfende Folge** für  $D$  ist eine Folge  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  messbarer (also insbesondere beschränkter) Teilmengen von  $D$ , so dass für alle  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

- (a) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Menge  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0)$  messbar, wobei  $K_r(0)$  wie in Definition 23.11 (a) die euklidische Kugel um 0 mit Radius  $r$  bezeichnet.
- (b)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}((D \setminus D_k) \cap K_r(0)) = 0$ .

**Bemerkung 29.43.** Die Bedingung (a) in Definition 29.42 ist offensichtlich notwendig, um Bedingung (b) formulieren zu können, also damit das Volumen der Menge  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0)$  überhaupt definiert ist. Diese zweite Bedingung besagt dann anschaulich, dass in jedem beschränkten Bereich (also in jeder Kugel  $K_r(0)$ ) die Teilmengen  $D_k$  der gegebenen Folge die Menge  $D$  vom Volumen her beliebig gut annähern. Wie erwartet werden wir dabei in Bemerkung 29.47 (b) noch sehen, dass die Wahl der euklidischen Norm hierbei letztlich keine Rolle spielt.

**Beispiel 29.44.**

- (a) Die Menge  $D = \mathbb{R}^n$  wird offensichtlich wie im Bild unten links dargestellt durch die euklidischen Kugeln  $D_k = K_k(0)$  ausgeschöpft, denn in diesem Fall gilt  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0) = \emptyset$  für alle  $k \geq r$  und damit natürlich  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}((D \setminus D_k) \cap K_r(0)) = 0$  für alle fest gewählten  $r$ . Genauso schöpfen auch die Würfel  $D_k = [-k, k]^n$  den ganzen  $\mathbb{R}^n$  aus, denn auch hier gilt  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0) = \emptyset$  für alle  $k \geq r$ .



- (b) Die Menge  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x\|_2 \leq 1\}$  wird von den im Bild oben rechts eingezeichneten Teilmengen  $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} \leq \|x\|_2 \leq 1\}$  mit  $k \geq 1$  ausgeschöpft, denn die Mengen  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0)$  sind nach Folgerung 29.9 (b) offensichtlich messbar, und ihr Volumen konvergiert wegen

$$(D \setminus D_k) \cap K_r(0) \subset D \setminus D_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x\|_2 < \frac{1}{k} \right\} \subset \left[ -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right]^n$$

und  $\text{vol}(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]^n) = \left(\frac{2}{k}\right)^n$  mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0.

- (c) Ist  $D$  selbst messbar, so ist die konstante Folge mit  $D_k = D$  für alle  $k$  offensichtlich eine ausschöpfende Folge für  $D$ .

Ist andererseits  $D$  beschränkt und  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  eine ausschöpfende Folge für  $D$ , so muss  $D$  bereits messbar sein: Ist dann nämlich  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $D \subset K_r(0)$ , so ist die Menge  $(D \setminus D_k) \cap K_r(0) = D \setminus D_k$  nach Definition 29.42 (a) für alle  $k$  messbar, und mit  $D_k$  nach Folgerung 29.9 (b) dann auch  $(D \setminus D_k) \cup D_k = D$ .

Insbesondere sehen wir also, dass nicht jede Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  eine ausschöpfende Folge besitzt: Die Menge  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  ist nach Beispiel 29.6 (b) beschränkt und nicht messbar, und kann damit auch keine ausschöpfende Folge besitzen.

**Definition 29.45** (Uneigentliche Integrale). Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- (a) Es sei zunächst  $f \geq 0$ . Gibt es dann eine ausschöpfende Folge  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  für  $D$ , so dass  $f$  auf jeder Menge  $D_k$  (beschränkt und) integrierbar ist, so nennen wir

$$\int_D f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

das **uneigentliche Integral** von  $f$  auf  $D$  — beachte, dass dieser Grenzwert nach Bemerkung 5.43 existiert, da die Folge der Integrale wegen  $f \geq 0$  und  $D_k \subset D_{k+1}$  für alle  $k$  monoton wachsend ist. Wir werden außerdem gleich in Lemma 29.46 sehen, dass diese Definition nicht von der Wahl der ausschöpfenden Folge abhängt. Liegt dieser Grenzwert zusätzlich in  $\mathbb{R}$ , ist er also nicht gleich  $\infty$ , so heißt das uneigentliche Integral  $\int_D f(x) dx$  **konvergent**, andernfalls **divergent**.

- (b) Für beliebiges  $f$  betrachten wir den positiven und negativen Anteil  $f_+$  bzw.  $f_-$  wie in Folgerung 29.8 (b) und definieren das uneigentliche Integral von  $f$  auf  $D$  als

$$\int_D f(x) dx := \int_D f_+(x) dx - \int_D f_-(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

sofern beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite gemäß (a) existieren und die Differenz nicht von der Form „ $\infty - \infty$ “ ist. Wie in (a) spricht man auch hier wieder von der Konvergenz dieses Integrals, wenn sein Wert in  $\mathbb{R}$  liegt.

**Lemma 29.46.** Die Definition 29.45 (a) des uneigentlichen Integrals nicht-negativer Funktionen ist unabhängig von der Wahl der ausschöpfenden Folge.

*Beweis.* Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine nicht-negative Funktion auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Weiterhin sei  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  eine ausschöpfende Folge für  $D$ , so dass  $f$  auf jeder Menge  $D_k$  integrierbar ist. Wir betrachten nun die beiden Werte

$$I := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx \quad \text{und} \quad S := \sup \left\{ \int_C f(x) dx : C \subset D \text{ messbar und } f \text{ integrierbar auf } C \right\},$$

die beide in  $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  existieren. Offensichtlich genügt es, die Gleichheit  $I = S$  zu zeigen, denn dann ist das uneigentliche Integral  $I$  ja gleich dem von der ausschöpfenden Folge unabhängigen Supremum  $S$ .

$I \leq S$ : Für alle  $k$  gilt  $\int_{D_k} f(x) dx \leq S$ , da dieses Integral in der Menge enthalten ist, von der für  $S$  das Supremum gebildet wird. Grenzwertbildung liefert mit Satz 5.23 (a) also auch  $I \leq S$ .

$S \leq I$ : Es genügt zu zeigen, dass  $I$  eine obere Schranke für alle Integrale  $\int_C f(x) dx$  ist, wobei  $C \subset D$  messbar und  $f$  auf  $C$  (beschränkt und) integrierbar ist — die kleinste obere Schranke  $S$  dieser Integrale kann dann nämlich höchstens so groß wie  $I$  sein.

Da eine solche Menge  $C$  insbesondere beschränkt ist, können wir ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  wählen mit  $C \subset K_r(0)$ . Dann ist  $C \setminus D_k$  messbar mit

$$\text{vol}(C \setminus D_k) = \text{vol}((C \setminus D_k) \cap K_r(0)) \leq \text{vol}((D \setminus D_k) \cap K_r(0)) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad (*)$$

nach Definition 29.42 (b). Ist nun  $c$  eine obere Schranke für  $f$  auf  $C$ , so gilt für alle  $k$

$$\int_C f(x) dx \leq \int_{C \cup D_k} f(x) dx = \int_{C \setminus D_k} f(x) dx + \int_{D_k} f(x) dx \leq c \cdot \text{vol}(C \setminus D_k) + \int_{D_k} f(x) dx,$$

und daher mit  $k \rightarrow \infty$  wegen (\*) auch wie behauptet

$$\int_C f(x) dx \leq c \cdot 0 + I = I. \quad \square$$

**Bemerkung 29.47.**

- (a) Sind  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine (beschränkte und) messbare Teilmenge und  $f$  eine (beschränkte und) integrierbare Funktion auf  $D$ , so haben wir den Ausdruck  $\int_D f(x) dx$  nun zweimal definiert: einmal als gewöhnliches Integral wie in Definition 29.5 (a) und einmal als uneigentliches

Integral in Definition 29.45. Die beiden Definitionen stimmen jedoch überein, da man nach Beispiel 29.44 (c) in der Konstruktion des uneigentlichen Integrals dann die konstante ausschöpfende Folge  $D \subset D \subset D \subset \dots$  wählen kann.

- (b) Die alternative Darstellung des uneigentlichen Integrals als Supremum  $S$  im Beweis von Lemma 29.46 zeigt auch, dass das vielleicht etwas künstlich erscheinende Auftreten der euklidischen Einheitskugeln in der Definition 29.42 der ausschöpfenden Folgen letztlich keine Rolle spielt.

**Bemerkung 29.48** (Uneigentliche Integrale ohne Aufteilung in  $f_+$  und  $f_-$ ). Die Formel aus Definition 29.45 (b), mit der wir das uneigentliche Integral beliebiger Funktionen definiert haben, ist in der Praxis etwas unbequem, weil die Integrale über die „künstlich abgeschnittenen“ Funktionen  $f_+$  und  $f_-$  in der Regel aufwändiger zu berechnen sind als die über  $f$ . Glücklicherweise ist eine solche Aufteilung aber oft nicht nötig: Nehmen wir einmal an, wir haben eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$ , von der wir bereits wissen, dass das uneigentliche Integral  $\int_D f(x) dx$  wie in Definition 29.45 existiert. Ferner sei  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$  eine ausschöpfende Folge für  $D$ , so dass  $f$  auf jedem  $D_k$  beschränkt und integrierbar ist.

Dann sind nach Folgerung 29.8 (b) auch  $f_+$  und  $f_-$  auf jedem  $D_k$  integrierbar, und nach Definition 29.45 (a) gilt

$$\int_D f_+(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f_+(x) dx \quad \text{und} \quad \int_D f_-(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f_-(x) dx.$$

Damit gilt nach Definition 29.45 (b) also

$$\int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f_+(x) dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f_-(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} (f_+(x) - f_-(x)) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

Wenn wir also bereits wissen, dass das Integral  $\int_D f(x) dx$  existiert, können wir seinen Wert auch ohne Aufteilung in  $f_+$  und  $f_-$  mit der gleichen Formel wie in Definition 29.45 (a) berechnen. In Beispiel 29.49 (c) werden wir jedoch sehen, dass diese Aussage ohne die Voraussetzung der Existenz des Integrals in der Regel falsch ist.

### Beispiel 29.49.

- (a) Um das uneigentliche Integral  $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} e^{-x-y} d(x,y)$  zu berechnen, können wir z. B. die ausschöpfende Folge  $(D_k)_k$  mit  $D_k = [0, k]^2$  wählen und erhalten gemäß Definition 29.45 (a)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} e^{-x-y} d(x,y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,k]^2} e^{-x-y} d(x,y) \\ &\stackrel{28.19}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^k e^{-x} dx \cdot \int_0^k e^{-y} dy \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^k \cdot [-e^{-y}]_0^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-k})^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

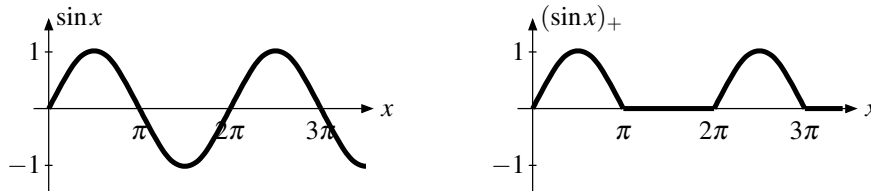
- (b) Das Integral  $\int_{(0,1)^2} \frac{x}{y} d(x,y)$  ist ebenfalls nur als uneigentliches Integral definiert, da die Funktion  $\frac{x}{y}$  auf dem Integrationsbereich  $(0,1)^2$  unbeschränkt ist. In diesem Fall können wir als ausschöpfende Folge  $(D_k)_k$  mit  $D_k = (0,1) \times (\frac{1}{k},1)$  wählen, da  $f$  auf jeder dieser Mengen

beschränkt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)^2} \frac{x}{y} d(x,y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(0,1) \times (\frac{1}{k}, 1)} \frac{x}{y} d(x,y) \\ &\stackrel{28.19}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 x dx \cdot \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{1}{y} dy \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log k \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten das (eindimensionale) Integral  $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \sin x dx$ . Wählen wir als ausschöpfende Folge hier  $(D_k)_k$  mit  $D_k = [0, 2\pi k]$ , so ist (siehe Bild unten)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} (\sin x)_+ dx = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \int_0^\pi \sin x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k = \infty.$$



Da analog natürlich auch  $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} (\sin x)_- dx = \infty$  gilt, existiert das uneigentliche Integral  $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \sin x dx$  gemäß Definition 29.45 (b) also nicht. Allerdings ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} \sin x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi k} \sin x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Wie schon in Bemerkung 29.48 erwähnt, sehen wir hier also noch einmal explizit, dass die Grenzwertformel wie in Definition 29.45 (a) für Funktionen mit wechselndem Vorzeichen nur angewendet werden darf, wenn die Existenz des Integrals bereits bekannt ist.

**Aufgabe 29.50.** Zeige, dass das uneigentliche Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  konvergiert.