Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis
Nachklausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält die 0.

Alle Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 1 (2+3 Punkte):

(a) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(2x^3+\sqrt{x})}{\log x}$.

(b) Die reelle Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}\, a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt.

Aufgabe 2 (4+2 Punkte):

(a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+3^n}{5^n}\, x^n$$

konvergiert.

(b) Begründe kurz, warum die zweite Ableitung $f''(0)$ der in (a) definierten reellen Funktion f an der Stelle 0 existiert, und berechne ihren Wert.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + (1-x^n)^2$.

Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte):

(a) Berechne das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(e^x+1)^3}\, dx$.

(b) Zeige für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx.$$

(Der Wert des Integrals muss nicht berechnet werden.)

— bitte wenden —

Aufgabe 5 (4 Punkte):
Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton wachsende Funktion.
Man zeige: Ist der Folgengrenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ gleich 0, so ist f an der Stelle 0 stetig.

Aufgabe 6 (4 Punkte):
Es sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge, so dass die drei Teilfolgen

$$(a_{2k})_k, \quad (a_{2k+1})_k, \quad (a_{k^2})_k$$

konvergieren. Zeige, dass dann auch die gesamte Folge $(a_n)_n$ konvergiert.

Aufgabe 7 (3+3 Punkte):
Es seien $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(a_n)_n$ eine Folge in $[0,1]$. Man zeige:

(a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n}$ konvergiert absolut.

(b) Es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n}$.

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte):
Man beweise oder widerlege:

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot |x|$ ist differenzierbar.

(b) Jede reelle Folge $(a_n)_n$ besitzt dieselben Häufungspunkte wie $\left(\frac{na_n}{n+1}\right)_n$.

(c) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Viel Erfolg!

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis WS 2023/24
Lösungshinweise zur Nachklausur

(1) (a) Mit de l'Hôpital erhalten wir, da Zähler und Nenner Grenzwert ∞ haben und die Ableitung des Nenners überall ungleich 0 ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(2x^3+\sqrt{x})}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^2+\frac{1}{2}x^{-1/2}}{2x^3+x^{1/2}}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+\frac{1}{2}x^{1/2}}{2x^3+x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{1}{2}x^{-5/2}}{2+x^{-5/2}} = 3. \quad 2$$

(b) Wegen $a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \geq a_n$ ist die Folge monoton wachsend mit $a_0 \geq 1$, hat also einen evtl. uneigentlichen Grenzwert $a \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$. Grenzwertbildung in der Rekursionsgleichung liefert $a = 2a$, womit nur $a = \infty$ bleibt. 3

(2) (a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist $1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n}{5^n}} = \frac{5}{4}/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+(\frac{3}{4})^n} = \frac{5}{4}$, also konvergiert die Reihe für $|x| < \frac{5}{4}$ und divergiert für $|x| > \frac{5}{4}$. 2 Für $|x| = \frac{5}{4}$ ist der Betrag des n-ten Summanden $\left|\frac{4^n+3^n}{5^n} \cdot \frac{5^n}{4^n}\right| = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 1$ für $n \to \infty$, die Reihe divergiert dann also nach dem Trivialkriterium. 2

(b) Nach der Taylor-Formel für Potenzreihen ist eine Potenzreihe im Konvergenzgebiet unendlich oft differenzierbar, und der Koeffizient des quadratischen Terms ist $\frac{f''(0)}{2!}$. Damit ist $f''(0) = 2 \cdot \frac{4^2+3^2}{5^2} = 2$. 2

(3) Für $x < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 + (1-0)^2 = 1$, 1 für $x = 1$ ist $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + 0^2 = 1$. Die Folge konvergiert also punktweise gegen die konstante Funktion 1. 1

Für die gleichmäßige Konvergenz bestimmen wir die kritischen Punkte und damit die Extrema von f_n: Es ist $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2(1-x^n)nx^{n-1} = -nx^{n-1} + 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(2x^n - 1) \overset{!}{=} 0$ für $x = \sqrt[n]{1/2}$ im Inneren des Definitionsbereichs. Dort ist $f_n(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ für alle n, 1 also $\|f_n - f\|_{\sup} \geq \left|\frac{3}{4} - 1\right| = \frac{1}{4} \not\to 0$, d. h. die Folge ist nicht gleichmäßig konvergent. 2

(4) (a) Substitution $u = \mathrm{e}^x + 1$ mit $\frac{du}{dx} = \mathrm{e}^x$ liefert

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{u^3}\,du = -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{2(\mathrm{e}^x+1)^2}, \quad 2$$

also $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \left[-\frac{1}{2(\mathrm{e}^x+1)^2}\right]_c^0 = \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(\mathrm{e}^c+1)^2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. 1

(b) Substitution $u = 1-x$ mit $\frac{du}{dx} = -1$ ergibt $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-u)^m u^n \cdot (-1)\,du = \int_0^1 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$. 2

(5) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Nach Annahme gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $f(\frac{1}{n}) < \varepsilon$. Setzen wir dann $\delta = \frac{1}{n}$, so gilt wegen der Monotonie für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < \delta$, dass $0 \leq f(x) < f(\delta) = f(\frac{1}{n}) < \varepsilon$, also $|f(x)| < \varepsilon$. Damit ist f stetig in 0 mit $f(0) = 0$. 4

(6) Es seien $a := \lim_{k\to\infty} a_{2k}$, $b := \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$, $c := \lim_{k\to\infty} a_{k^2}$. Dann ist $(a_{(2k)^2})_k = (a_{2\cdot 2k^2})_k$ eine Teilfolge der ersten und dritten Folge; da Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren, konvergiert sie also gegen a und c. Also folgt $a = c$. Analog folgt $b = c$ mit der Teilfolge $(a_{(2k+1)^2})_k = (a_{2(2k^2+2k)+1})_k$. Damit ist auch $a = b$. Da $(a_n)_n$ eine Mischfolge der ersten beiden Folgen ist, konvergiert sie somit nach Vorlesung ebenfalls gegen a. 4

(7) (a) Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist f beschränkt; es sei $s \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq s$ für alle $x \in [0,1]$. Dann ist $\left|\frac{f(a_n)}{2^n}\right| \leq \frac{s}{2^n}$ (1) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2^n} = s \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = s$ (1) konvergent, damit konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n}$ nach dem Majorantenkriterium absolut. (1)

(b) Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt f ein Minimum $f(a)$ und Maximum $f(b)$ für gewisse $a,b \in [0,1]$ an. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a)}{2^n}$ (1) $= f(a) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = f(a)$ und analog $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n} \leq f(b)$, (1) nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein x zwischen a und b mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{2^n} = f(x)$. (1)

(8) (a) ist wahr: Im Nullpunkt 0 ist $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$; (1) für $x > 0$ stimmt f mit der differenzierbaren Funktion x^2 überein und für $x < 0$ mit der differenzierbaren Funktion $-x^2$. (1)

(b) ist wahr: Ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, also auch $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k a_{n_k}}{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_k+1} a_{n_k} = 1 \cdot a = a$, d. h. a ist auch ein Häufungspunkt von $\left(\frac{na_n}{n+1}\right)_n$. Die Rückrichtung folgt analog, denn mit $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k a_{n_k}}{n_k+1} = a$ ist auch $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k+1}{n_k} \cdot \frac{n_k a_{n_k}}{n_k+1} = 1 \cdot a = a$. (2)

(c) ist falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ ist in jedem (rationalen) Punkt stetig, aber unbeschränkt. (2)