Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra
Nachklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Die Menge $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen enthält die* 0.

Alle Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Für welche a ist die Matrix A invertierbar?

(b) Bestimme die inverse Matrix A^{-1} im Fall $a = 3$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(x_1, \dots, x_n)$.
Zeige durch unmittelbares Nachprüfen der Definition (also ohne z. B. die Verwendung von Dimensionsargumenten), dass dann auch die Familie $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 3 (4+3 Punkte):

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $M \in K^{n\times n}$ eine fest gegebene Matrix.

Zeige, dass
$$U := \{A \in K^{n\times n} : \text{es gibt ein } c \in K \text{ mit } AM = cM\}$$
ein Unterraum von $K^{n\times n}$ ist, und bestimme im Fall einer invertierbaren Matrix M die Dimension von U.

(b) Es seien $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to Z$ zwei Abbildungen zwischen K-Vektorräumen.

Man zeige: Ist g injektiv, und sind $g \circ f$ und g linear, so ist auch f linear.

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (2+4 Punkte):
Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Man zeige:

(a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(b) Es gibt eine Basis B von V, so dass die Abbildungsmatrix von f mit *gleicher* Start- und Zielbasis B die Form $A_f^{B,B} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $r = \operatorname{rk} f$ hat.

Aufgabe 5 (5 Punkte):
Zu zwei gegebenen Unterräumen U_1 und U_2 eines Vektorraums V betrachten wir die lineare Abbildung

$$f\colon U_1 \to V/U_2,\ x \mapsto \overline{x}.$$

Man zeige: Ist f ein Isomorphismus, so ist U_2 ein Komplement von U_1.

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte):
Man beweise oder widerlege:

(a) Es gibt eine invertierbare reelle Matrix A mit ganzzahligen Einträgen, so dass $\det(A^{-1}) = \frac{2}{3}$ gilt.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A, B \in K^{n\times n}$ ist $\operatorname{Ker}(AB) \neq \{0\}$ genau dann, wenn $\operatorname{Ker}(BA) \neq \{0\}$ gilt.

(c) Zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, so dass AS in Zeilenstufenform ist.

Viel Erfolg!

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra WS 2023/24
Lösungshinweise zur Nachklausur

(1) Wir bestimmen A^{-1} nach dem Verfahren der Vorlesung:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a+4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist also invertierbar genau für $a \neq 2$. 2 Im Fall $a = 3$ rechnen wir weiter:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

In der rechten Hälfte steht dabei nun die Matrix A^{-1}. 2

(2) Lineare Unabhängigkeit: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_1(x_1 + x_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)x_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)x_n = 0.$$

Da $(x_1, \dots, x_n)$ linear unabhängig ist, gilt dabei $\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0$, also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. 2

Erzeugendensystem: Es sei $x \in V$ beliebig. Da $(x_1, \dots, x_n)$ ein Erzeugendensystem ist, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Wir suchen $\mu_1, \dots, \mu_n$ mit

$$x = \mu_1(x_1 + x_2) + \cdots + \mu_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + \mu_n x_n = \mu_1 x_1 + (\mu_1 + \mu_2)x_2 + \cdots + (\mu_{n-1} + \mu_n)x_n;$$

dies gilt für $\mu_1 := \lambda_1$ und rekursiv $\mu_n := \lambda_n - \mu_{n-1}$ für alle $n > 1$. 3

(3) (a) Mit $c = 0$ ist $0M = cM$, also gilt $0 \in U$.
Ist $A \in U$ und $\lambda \in K$, also $AM = cM$, so ist $(\lambda A)M = (\lambda c)M$, also $\lambda A \in U$. 1
Sind $A, B \in U$, gibt es also $c, d \in K$ mit $AM = cM$ und $BM = dM$, so ist $(A+B)M = (c+d)M$, also $A + B \in U$. 1
Für invertierbares M ist die gegebene Gleichung $AM = cM$ (durch Multiplikation mit M^{-1} von rechts) äquivalent zu $A = cE$, es ist also $U = \mathrm{Lin}(E)$ und damit $\dim U = 1$. 2

(b) Es seien $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Da $g \circ f$ und g linear sind, ist $g(f(x+y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g(f(x) + f(y))$, aus der Injektivität von g folgt dann $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 2 Analog ist $g(f(\lambda x)) = \lambda g(f(x)) = g(\lambda f(x))$, und damit $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. 1

(4) (a) Es sei $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. Wegen $x \in \mathrm{Im} f$ ist $x = f(y)$ für ein y, mit $x \in \mathrm{Ker} f$ folgt $x = f(y) = f(f(y)) = f(x) = 0$. 2

(b) Nach (a) ist die Summe $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ direkt. Wählen wir Basen $(x_1, \dots, x_r)$ von $\mathrm{Im} f$ (mit $r = \mathrm{rk} f$) und $(y_1, \dots, y_s)$ von $\mathrm{Ker} f$, so ist also $B := (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ linear unabhängig, und mit der Dimensionsformel $r + s = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V$ eine Basis von V. 1 Für alle $x \in \mathrm{Im} f$ mit $x = f(y)$ gilt $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, 1 daher ist $f(x_i) = x_i$ und $f(y_j) = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, s$, und $A_f^{B,B} = (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_r \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0)$ hat die gesuchte Form. 2

(5) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$: Es sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann ist $f(x) = \overline{x} = \overline{0}$ wegen $x \in U_2$. Da f injektiv ist, ist damit $x = 0$. ②

$U_1 + U_2 = V$: Es sei $x \in V$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x_1 \in U_1$ mit $\overline{x_1} = f(x_1) = \overline{x}$. Also ist $x_2 := x - x_1 \in U_2$, d. h. $x = x_1 + x_2 \in U_1 + U_2$. ③

(6) (a) ist falsch: Aus der Laplace-Entwicklung folgt, dass aus den ganzzahligen Einträgen von A auch $\det A =: x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ folgt. Damit kann aber $\det(A^{-1}) = \frac{1}{x}$ als Kehrwert einer ganzen Zahl nicht $\frac{2}{3}$ sein. ②

(b) ist wahr: Aus $\operatorname{Ker}(AB) \neq \{0\}$ folgt $\operatorname{rk}(AB) < n$. Damit ist mindestens eine der Matrizen A und B nicht invertierbar, hat also auch Rang kleiner als n. Somit folgt auch $\operatorname{rk}(BA) \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B) < n$, d. h. $\operatorname{Ker}(BA) \neq \{0\}$. Die Rückrichtung ist analog. ②

(c) ist falsch: Zu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die erste Zeile von AS immer gleich 0, wegen $\operatorname{rk} A = 1$ müsste eine Zeilenstufenform von A aber eine 1 in der ersten Zeile haben. ②