1. Topologische Räume

Wie schon in der Einleitung erwähnt wollen wir uns in dieser Vorlesung mit *stetigen Abbildungen* beschäftigen. Als Erstes müssen wir uns daher fragen, welche Struktur die Start- und Zielräume der betrachteten Abbildungen haben müssen, damit wir den Begriff der stetigen Abbildung zwischen ihnen überhaupt erst einmal sinnvoll definieren können.

Aus den „Grundlagen der Mathematik" wisst ihr auf diese Frage bereits eine erste Antwort: Für *metrische Räume* (also insbesondere auch für normierte Vektorräume) kann man stetige Abbildungen mit dem üblichen „ε-δ-Kriterium" einführen und untersuchen [G2, Definition 23.8 und 24.1]. In der Tat wollen wir die elementaren Eigenschaften solcher stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen wie z. B. in [G2, Kapitel 23 und 24] im Folgenden als bekannt voraussetzen.

Beachte jedoch, dass ein metrischer Raum für unsere Zwecke eigentlich schon zu viele Informationen enthält. So haben wir ja z. B. bereits in den „Grundlagen der Mathematik" bei der Untersuchung der Äquivalenz von Normen [G2, Lemma 23.15 und Bemerkung 23.16] gesehen, dass verschiedene Metriken auf $\mathbb{R}^n$ durchaus zu gleichen topologischen Eigenschaften führen können. Der Grund hierfür ist letztlich, dass wir in der Topologie zwei Räume X und Y schon als gleichwertig ansehen können, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt, so dass sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist (siehe Definition 2.14 und Bemerkung 2.15). Anschaulich bedeutet dies einfach, dass Y eine Deformation von X ist — und eine Deformation kann natürlich problemlos die Abstände zwischen Punkten ändern. Für topologische Untersuchungen sollte es also eigentlich gar nicht erst nötig sein, Abstände zwischen Punkten messen zu können, d. h. eine Metrik festzulegen.

Aber ohne Metrik gibt es keine ε-Umgebungen, und damit kein ε-δ-Kriterium. Wie kann man dann trotzdem noch stetige Abbildungen definieren? Dazu erinnern wir uns daran, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ wieder offen in X ist [G2, Satz 24.20]. Dies bedeutet für uns zwei Dinge:

- Wenn wir lediglich wissen, welche Teilmengen eines gegebenen Raumes offen sind, so genügt uns dies, um über Stetigkeit reden zu können.
- Ist $f\colon X \to Y$ wie oben bijektiv, so dass f und f^{-1} beide stetig sind und X und Y damit als topologisch gleichwertig anzusehen sind, so sind sowohl Bilder als auch Urbilder offener Mengen unter f wieder offen, d. h. f identifiziert die offenen Mengen von X genau mit denen von Y. Die Information darüber, welche Teilmengen offen sind, bleibt im Gegensatz zur Metrik unter derartigen Abbildungen also erhalten.

Dies führt unmittelbar zur Idee eines *topologischen Raumes*, den wir nun genau dadurch definieren wollen, dass wir in ihm festgelegt haben, welche Teilmengen offen heißen sollen und welche nicht. Diese Festlegung können wir jedoch nicht völlig beliebig vornehmen, denn es sollten zumindest die aus den Grundlagen der Mathematik bekannten Standardeigenschaften offener Mengen gelten: nämlich dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind [G2, Lemma 23.32].

Für eine Menge X bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathscr{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X, die sogenannte *Potenzmenge* von X.

Definition 1.1 (Topologische Räume)**.** Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X, wenn gilt:

(a) $\emptyset \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$;

(b) sind $U_i \in \mathscr{T}$ für alle i aus einer beliebigen Indexmenge J, so ist auch $\bigcup_{i\in J} U_i \in \mathscr{T}$ (d. h. „$\mathscr{T}$ ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen");

(c) sind $U, V \in \mathscr{T}$, so ist auch $U \cap V \in \mathscr{T}$ (d. h. „$\mathscr{T}$ ist abgeschlossen unter Durchschnitten von zwei und damit auch von endlich vielen Mengen“).

Man nennt $(X, \mathscr{T})$ in diesem Fall einen **topologischen Raum** und schreibt ihn auch einfach als X, wenn die betrachtete Topologie aus dem Zusammenhang klar ist.

Die Mengen in $\mathscr{T}$ heißen **offen** bezüglich dieser Topologie. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist.

Sind $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ zwei Topologien auf derselben Menge X mit $\mathscr{T}_1 \subsetneq \mathscr{T}_2$, so heißt $\mathscr{T}_1$ **gröber** als $\mathscr{T}_2$ bzw. $\mathscr{T}_2$ **feiner** als $\mathscr{T}_1$ (woher dieser Name kommt, werden wir in Beispiel 1.21 sehen).

Beispiel 1.2 (Metrische Räume sind topologische Räume)**.** Ist (X, d) ein *metrischer Raum* [G2, Definition 23.8] und bezeichnet

$$U_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

für $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ wie üblich die offene Kugel vom Radius r um a, so wissen wir aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits, dass X dann zu einem topologischen Raum wie in Definition 1.1 wird, wenn wir eine Teilmenge $U \subset X$ offen nennen (also U in $\mathscr{T}$ liegt), wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$ [G2, Definition 23.30 (a) und Lemma 23.32]. Wie man leicht nachprüft, sind dann z. B. alle Kugeln $U_r(a)$ offen [G2, Beispiel 23.31 (c)].

Diese Festlegung ist die Standardtopologie auf metrischen Räumen — wir werden metrische Räume im Folgenden also immer auf diese Art als topologische Räume auffassen, sofern wir nichts anderes angeben.

Ist X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so wollen wir darüber hinaus festlegen, dass wir X ohne gegenteilige Angaben stets als metrischen Raum mit der euklidischen Metrik, und somit auch wie oben als topologischen Raum ansehen wollen. Dabei benutzen wir die folgenden in der Topologie üblichen Standardnotationen: Es bezeichnet für $n \in \mathbb{N}$

(a) $I^n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ den n-dimensionalen *Einheitswürfel*, und $I := I^1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ das *Einheitsintervall*;

(b) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ die n-dimensionale abgeschlossene *Einheitskugel* in der euklidischen Norm $|| \cdot ||$ in $\mathbb{R}^n$;

(c) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ die n-dimensionale *Einheitssphäre* in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Die Einheitskreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ und den Einheitskreis $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ werden wir dabei auch oft als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auffassen.

Bemerkung 1.3 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)**.** Sind U_i Teilmengen eines topologischen Raumes X für alle i in einer beliebigen Indexmenge J, so gelten bekanntlich die mengentheoretischen Beziehungen

$$X \backslash \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcap_{i \in J} (X \backslash U_i) \quad \text{und} \quad X \backslash \bigcap_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} (X \backslash U_i).$$

Durch Übergang zum Komplement erhalten wir also aus den Eigenschaften (a) bis (c) von Definition 1.1 sofort die folgenden äquivalenten Eigenschaften für abgeschlossene Mengen:

(a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen;

(b) beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen;

(c) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen;

Bemerkung 1.4. Es ist in Definition 1.1 wichtig, dass zwar *beliebige* Vereinigungen, aber nur *endliche* Durchschnitte offener Mengen wieder offen sein müssen. Natürlich hätten wir auch eine andere Definition hinschreiben und z. B. verlangen können, dass beliebige Vereinigungen und Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind — aber dann wäre nicht einmal der $\mathbb{R}^n$ mit den üblichen Festlegungen wie in Beispiel 1.2 ein topologischer Raum geworden, denn dort ist ja z. B. der unendliche Durchschnitt offener Mengen

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(0) = \{0\}$$

nicht offen.

Wie ihr euch vermutlich schon denken könnt, ist der Begriff eines topologischen Raumes sehr allgemein und lässt noch viel mehr Fälle zu als die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ oder anderen metrischen Räumen. Um etwas Gefühl dafür zu bekommen, wie topologische Räume aussehen können, ist es daher wichtig, weitere Beispiele kennenzulernen, die von dieser Standardtopologie möglichst stark abweichen. Ein paar solcher Beispiele wollen wir jetzt untersuchen.

Beispiel 1.5 (Beispiele topologischer Räume)**.**

(a) (*SNCF-Metrik* oder *französische Eisenbahnmetrik*) Wie man leicht nachprüft, definiert

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ ||x|| + ||y|| & \text{für } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik auf $X = \mathbb{R}^n$, wobei $||\cdot||$ wieder die euklidische Norm bezeichnet. Man nennt sie *SNCF-Metrik* oder *französische Eisenbahnmetrik*, da in Frankreich gerüchteweise alle Zugverbindungen über Paris (den „Nullpunkt“) laufen und die Metrik ja gerade beschreibt, dass der Abstand zweier verschiedener Punkte x und y gleich der Summe der Abstände von x zu 0 und von 0 zu y ist. Wir werden in Aufgabe 2.7 noch sehen, dass die von dieser Metrik auf $\mathbb{R}^n$ erzeugte Topologie sehr verschieden von der Standardtopologie ist, also dass hier ganz andere Mengen offen sind als in der gewöhnlichen Topologie.

(b) Auf jeder beliebigen Menge X ist $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ trivialerweise eine Topologie; sie heißt die **diskrete Topologie** auf X. Sie ist die feinste mögliche Topologie auf X: In ihr ist *jede* Teilmenge von X offen (und damit auch jede Teilmenge abgeschlossen).

Analog ist auch $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$, d. h. wenn nur die leere Menge und der gesamte Raum offen sind, auf jeder Menge X eine Topologie. Sie wird die **indiskrete Topologie** auf X genannt. Da die leere Menge und der gesamte Raum nach Definition 1.1 (a) immer offen sein müssen, ist dies die gröbste mögliche Topologie auf X.

(c) Auf jeder beliebigen Menge X definiert

$$\mathscr{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \backslash U \text{ ist endlich}\}$$

offensichtlich eine Topologie auf X; in ihr sind also neben der leeren Menge genau die Komplemente endlicher Mengen offen. Wir nennen sie die **Komplement-endlich-Topologie** auf X. Analog ist auch

$$\mathscr{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \backslash U \text{ ist (endlich oder) abzählbar}\}$$

eine Topologie, die wir die **Komplement-abzählbar-Topologie** auf X nennen.

Konstruktion 1.6 (Teilraumtopologie)**.** Es seien $(X, \mathscr{T}_X)$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge von X. Wir setzen

$$\mathscr{T}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathscr{T}_X\},$$

d. h. nennen eine Teilmenge von Y genau dann offen, wenn sie der Schnitt von Y mit einer in X offenen Menge ist. Dann ist $\mathscr{T}_Y$ eine Topologie auf Y, denn die drei Axiome aus Definition 1.1 sind schnell überprüft:

(a) $\emptyset = Y \cap \emptyset$ und $Y = Y \cap X$ sind offen in $\mathscr{T}_Y$, weil $\emptyset$ und X offen in $\mathscr{T}_X$ sind;

(b) sind $U_i \in \mathscr{T}_Y$ für $i \in J$, also $U_i = Y \cap V_i$ für $V_i \in \mathscr{T}_X$, so ist auch $\bigcup_{i \in J} U_i = Y \cap \bigcup_{i \in J} V_i \in \mathscr{T}_Y$;

(c) sind $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_Y$, also $U_1 = Y \cap V_1$ und $U_2 = Y \cap V_2$ für gewisse $V_1, V_2 \in \mathscr{T}_X$, so ist damit auch $U_1 \cap U_2 = Y \cap (V_1 \cap V_2) \in \mathscr{T}_Y$.

Wir nennen $\mathscr{T}_Y$ die (von $\mathscr{T}_X$ induzierte) **Teilraumtopologie** oder **Relativtopologie** auf Y. Die Teilraumtopologie ist die Standardtopologie auf Teilmengen topologischer Räume. Sofern wir nichts anderes angeben, werden wir Teilmengen topologischer Räume in Zukunft also immer mit dieser Teilraumtopologie betrachten.

Aufgabe 1.7. Es sei Y eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes X. Wir haben dann oben zwei Arten kennen gelernt, wie man auf Y eine natürliche Topologie definieren kann:

(a) Y ist mit der Einschränkung der Metrik auf X auch selbst ein metrischer Raum und hat damit eine zugehörige Standardtopologie wie in Beispiel 1.2.

(b) Y ist eine Teilmenge des topologischen Raumes X und hat damit eine zugehörige Teilraumtopologie wie in Konstruktion 1.6.

Zeige, dass diese beiden Topologien auf Y übereinstimmen. Es können also keine Missverständnisse entstehen, wenn wir Teilmengen metrischer Räume in Zukunft ohne weitere Angaben als topologische Räume betrachten.

Beispiel 1.8.

(a) Im topologischen Raum $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $[0,1)$ offen, denn sie ist der Durchschnitt von $[0,2]$ mit der in $\mathbb{R}$ offenen Menge $(-1,1)$.

(b) In $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist jede einpunktige Menge $\{a\} = \mathbb{Z} \cap (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ für $a \in \mathbb{Z}$ offen. Da Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind, ist damit also *jede* Teilmenge von $\mathbb{Z}$ in der Teilraumtopologie von $\mathbb{Z}$ offen: Die Teilraumtopologie von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist die diskrete Topologie.

Aufgabe 1.9. Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Man zeige:

(a) Eine Teilmenge von Y ist genau dann abgeschlossen in der Relativtopologie von Y, wenn sie von der Form $Y \cap A$ für eine in X abgeschlossene Menge A ist.

(b) Ist Y offen, so ist eine Teilmenge von Y genau dann offen in der Relativtopologie von Y, wenn sie offen in X ist.

(c) Ist Y abgeschlossen, so ist eine Teilmenge von Y genau dann abgeschlossen in der Relativtopologie von Y, wenn sie abgeschlossen in X ist.

Um noch weitere Topologien einfacher konstruieren zu können, benötigen wir den Begriff der Basis einer Topologie. Die Idee hierfür kommt aus dem folgenden Lemma für metrische Räume.

Lemma 1.10 (Offene Mengen in metrischen Räumen)**.** *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X ist genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von (offenen) Kugeln ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $U \subset X$ offen. Nach Beispiel 1.2 bedeutet dies, dass es um jeden Punkt $a \in U$ eine Kugel $U_{\varepsilon_a}(a)$ gibt, die noch ganz in U liegt. Dann ist aber

$$\begin{aligned} U &\subset \bigcup_{a \in U} U_{\varepsilon_a}(a) && (\text{denn } a \in U_{\varepsilon_a}(a) \text{ für alle } a \in U) \\ &\subset U && (\text{wegen } U_{\varepsilon_a}(a) \subset U). \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichheit, d. h. U ist eine Vereinigung von Kugeln.

„$\Leftarrow$“: Da jede Kugel offen ist, ist eine Vereinigung von Kugeln nach Definition 1.1 (b) natürlich auch offen. □

In der Tat ist es in vielen topologischen Räumen möglich, alle offenen Mengen aus einer einfacheren Klasse von Teilmengen zu erzeugen, indem man beliebige Vereinigungen bildet. Wir definieren daher:

Definition 1.11 (Basis einer Topologie)**.** Es sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt eine Menge $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ von Teilmengen von X eine **Basis** von $\mathscr{T}$ bzw. von $(X, \mathscr{T})$, wenn für alle $U \subset X$ gilt, dass U genau dann offen ist (also in $\mathscr{T}$ liegt), wenn U eine Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ ist.

Bemerkung 1.12.

(a) Nach Lemma 1.10 bilden die offenen Kugeln in einem metrischen Raum eine Basis der Topologie.

(b) Ist $\mathscr{B}$ eine Basis eines topologischen Raumes $(X, \mathscr{T})$, so muss natürlich auch jedes Element von $\mathscr{B}$ (als einelementige Vereinigung von sich selbst) offen sein. Es ist also stets $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$. Hat man eine konkrete Basis $\mathscr{B}$ von $\mathscr{T}$ gegeben, so werden die Mengen in $\mathscr{B}$ daher auch als **basis-offene Mengen** bezeichnet.

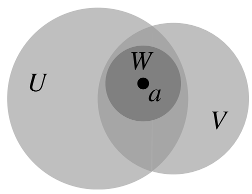
(c) Der Begriff einer Basis einer Topologie hat nichts mit dem Begriff einer Basis eines Vektorraums zu tun und „verhält sich auch nicht analog“. Eine Basis gemäß Definition 1.11 hat nämlich keinerlei Minimalitätseigenschaft — so ist z. B. die Menge $\mathscr{B} = \mathscr{T}$ *aller* offenen Mengen immer eine Basis von $\mathscr{T}$ (wenn auch eine ziemlich langweilige). Es stimmt also z. B. auch nicht, dass sich jede offene Menge *eindeutig* als Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{B}$ schreiben lassen muss (wie man aufgrund des Basisbegriffs in der linearen Algebra vielleicht vermuten könnte).

Die eigentliche Bedeutung von Basen kommt daher, dass man mit ihnen gut Topologien konstruieren kann, indem man eine möglichst einfache Basis angibt. Dazu müssen wir natürlich wissen, welche Mengensysteme $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ hierfür geeignet sind, also wirklich eine Basis einer Topologie darstellen. Dies klärt der folgende Satz.

Satz 1.13 (Konstruktion von Topologien aus Basen)**.** *Es seien X eine Menge und $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(a) $\bigcup_{U \in \mathscr{B}} U = X$ *(„die Vereinigung aller Mengen aus $\mathscr{B}$ ist der gesamte Raum“);*

(b) *für alle $U, V \in \mathscr{B}$ und $a \in U \cap V$ gibt es (wie im Bild rechts) ein $W \in \mathscr{B}$ mit $a \in W \subset U \cap V$.*



Dann ist $\mathscr{B}$ Basis einer eindeutigen Topologie $\mathscr{T}$ auf X. Man nennt $\mathscr{T}$ die von $\mathscr{B}$ ***erzeugte Topologie****.*

Beweis. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathscr{T} := \Big\{ \bigcup_{i \in J} U_i : U_i \in \mathscr{B} \text{ für alle } i \text{ in einer Indexmenge } J \Big\}$$

aller Teilmengen von X, die sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ schreiben lassen. Nach Definition 1.11 kommt natürlich nur dieses $\mathscr{T}$ als Topologie mit Basis $\mathscr{B}$ in Frage — was bereits die Eindeutigkeit zeigt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\mathscr{T}$ wirklich eine Topologie ist, also die drei Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllt:

(a) $\emptyset \in \mathscr{T}$ ist klar; $X \in \mathscr{T}$ gilt nach Voraussetzung (a).

(b) folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathscr{T}$.

(c) Es seien $U, V \in \mathscr{T}$ und $a \in U \cap V$. Da U und V Vereinigungen von Mengen aus $\mathscr{B}$ sind, gibt es $U', V' \in \mathscr{B}$ mit $a \in U' \cap V' \subset U \cap V$. Nach Voraussetzung (b) existiert also eine Menge $W_a \in \mathscr{B}$ mit $a \in W_a \subset U' \cap V' \subset U \cap V$. Vereinigen wir nun diese Mengen für alle $a \in U \cap V$, so erhalten wir natürlich $\bigcup_{a \in U \cap V} W_a = U \cap V$ und damit $U \cap V \in \mathscr{T}$ nach Definition von $\mathscr{T}$. □

Bemerkung 1.14. Beachte, dass die Bedingung (b) aus Satz 1.13 insbesondere dann erfüllt ist, wenn $\mathscr{B}$ abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, also mit $U, V \in \mathscr{B}$ auch stets $U \cap V \in \mathscr{B}$ gilt (sofern diese Menge nicht leer ist): Dann können wir nämlich immer $W = U \cap V$ wählen. In vielen konkreten Beispielen, wie z. B. den folgenden Konstruktionen, ist dies der Fall und vereinfacht die Situation damit noch einmal.

Konstruktion 1.15 (Produkttopologie)**.** Es seien X und Y zwei topologische Räume. Wir betrachten das System

$$\mathscr{B} = \{U \times V : U \subset X \text{ offen}, V \subset Y \text{ offen}\}$$

von Teilmengen von $X \times Y$. Dies erfüllt die Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 1.13:

(a) ist klar, da der gesamte Raum $X \times Y$ bereits eine Menge in $\mathscr{B}$ ist.

(b) folgt aus Bemerkung 1.14, da für zwei Mengen $U_1 \times V_1$ und $U_2 \times V_2$ in $\mathscr{B}$ ihr Durchschnitt $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ nach Definition 1.1 (c) auch wieder in $\mathscr{B}$ liegt.

Nach Satz 1.13 erzeugt $\mathscr{B}$ also eine Topologie auf $X \times Y$. Sie wird die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ genannt und ist die Standardtopologie auf Produkten topologischer Räume. Ihre offenen Mengen sind also genau die Vereinigungen von Mengen der Form $U \times V$, wobei U und V offen in X bzw. Y sind. Natürlich lässt sich diese Konstruktion statt für zwei auch für mehrere Faktoren durchführen.

Aufgabe 1.16. Mit Konstruktion 1.15 haben wir auf $\mathbb{R}^n$ jetzt neben der Standardtopologie noch eine weitere natürliche Topologie eingeführt, nämlich die von $\mathbb{R}$ induzierte Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Zeige, dass diese beiden Topologien übereinstimmen, so dass es hier also nicht zu
01 Missverständnissen kommen kann.

Beispiel 1.17 (Sorgenfrey-Topologie)**.** Es sei $\mathscr{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller links abgeschlossenen und rechts offenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Dann erfüllt $\mathscr{B}$ die Voraussetzungen von Satz 1.13:

(a) ist klar, da bereits die Vereinigung der Intervalle $[n, n+1)$ für $n \in \mathbb{Z}$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

(b) folgt aus Bemerkung 1.14, weil nicht-leere Durchschnitte von zwei links abgeschlossenen und rechts offenen Intervallen wieder von dieser Form sind.

Die damit nach Satz 1.13 von $\mathscr{B}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugte Topologie $\mathscr{T}$ wird **Sorgenfrey-Topologie** genannt. Wir werden sie im Folgenden immer mal wieder als nicht-triviales Beispiel einer Topologie auf $\mathbb{R}$ betrachten, die nicht gleich der Standardtopologie ist. In der Tat ist sie feiner als die Standardtopologie:

- Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen in der Standardtopologie, so gibt es natürlich zu jedem $a \in U$ ein halboffenes Intervall $[a, a+\varepsilon_a) \subset U$. Die Vereinigung $\bigcup_{a \in U} [a, a+\varepsilon_a)$ ist dann offensichtlich gleich U, und gleichzeitig Sorgenfrey-offen als Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{B}$.
- Das halboffene Intervall hingegen $[0,1)$ ist Sorgenfrey-offen, aber nicht offen in der Standardtopologie.

Die Sorgenfrey-Topologie ist aber natürlich gröber als die diskrete Topologie, denn die einpunktige Menge $\{0\}$ kann nicht als Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{B}$ geschrieben werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch einige bereits aus den „Grundlagen der Mathematik" bekannte topologische Konzepte auf die offensichtliche Art auf allgemeine topologische Räume übertragen.

Definition 1.18 (Inneres, Abschluss und Rand)**.** Es seien X ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $M \subset X$ eine Teilmenge von X.

(a) a heißt **innerer Punkt** von M, wenn es eine offene Menge U gibt mit $a \in U \subset M$. In diesem Fall nennt man M auch eine **Umgebung** von a. Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet und das **Innere** von M genannt.

(b) a heißt **Berührpunkt** von M, wenn jede offene Menge U mit $a \in U$ einen Punkt aus M enthält. Die Menge aller Berührpunkte von M wird mit $\overline{M}$ bezeichnet und der **Abschluss** von M genannt.

(c) a heißt **Randpunkt** von M, wenn jede offene Menge U mit $a \in U$ sowohl einen Punkt aus M als auch einen aus dem Komplement $X \backslash M$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von M wird mit ∂M bezeichnet und der **Rand** von M genannt.

Bemerkung 1.19. In allen drei Teilen der Definition 1.18 kann der Begriff „offene Menge U" durch „basis-offene Menge U" ersetzt werden, wenn die Topologie auf X durch eine Basis $\mathscr{B}$ gegeben ist. Wir zeigen dies hier exemplarisch für Teil (a), also die Äquivalenz

$$\text{es gibt } U \subset X \text{ offen mit } a \in U \subset M \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } V \in \mathscr{B} \text{ mit } a \in V \subset M.$$

In der Tat ist die Richtung „$\Leftarrow$“ offensichtlich, weil jede basis-offene Menge offen ist und wir somit $U = V$ wählen können. Für die Richtung „$\Rightarrow$“ schreiben wir die gegebene offene Menge U als Vereinigung basis-offener Mengen aus $\mathscr{B}$. Da diese basis-offenen Mengen U überdecken, gibt es unter ihnen eine Menge V, die a enthält und für die somit $a \in V \subset M$ gilt.

Da basis-offene Mengen in der Regel eine einfachere Form als allgemeine offene Mengen haben, zeigt diese Bemerkung noch einmal die Nützlichkeit von Basen beim Umgang mit topologischen Räumen.

Die oben definierten Mengen $\mathring{M}$, $\overline{M}$ und ∂M erfüllen einige einfache Relationen, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen und genauso bewiesen werden wie im Fall von metrischen Räumen in den „Grundlagen der Mathematik“. Ihr Beweis sei deshalb hier nur der Vollständigkeit halber angegeben (und wurde in der Vorlesung auch nicht vorgeführt).

Lemma 1.20. *Für jede Teilmenge M eines topologischen Raumes gilt:*

(a) *$\mathring{M}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M liegen, also*

$$\mathring{M} = \bigcup_{U \subset M \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\mathring{M}$ offen; und es ist M genau dann offen, wenn $M = \mathring{M}$.

(b) *$\overline{M}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten, also*

$$\overline{M} = \bigcap_{A \supset M \text{ abgeschlossen}} A.$$

Insbesondere ist $\overline{M}$ abgeschlossen; und es ist M genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$.

(c) *$\mathring{M} = M \backslash \partial M$.*

(d) *$\overline{M} = M \cup \partial M$.*

(e) *$\partial M = \overline{M} \backslash \mathring{M}$. Insbesondere ist ∂M abgeschlossen.*

Beweis.

(a) Nach den Definitionen folgt für alle $a \in X$ sofort

$$a \in \mathring{M} \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \subset M \quad \Leftrightarrow \quad a \in \bigcup_{U \subset M \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\mathring{M}$ als Vereinigung offener Mengen also offen. Ist weiterhin M offen, so ist M selbst eine der Mengen, über die wir hier die Vereinigung bilden, und damit ist diese Vereinigung (also $\mathring{M}$) dann gleich M.

(b) zeigt man analog zu (a) durch Übergang zum Komplement: Für $a \in X$ gilt nach Definition 1.18 (b)

$$\begin{aligned} a \notin \overline{M} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \text{ und } U \subset X \backslash M \\ &\Leftrightarrow \quad a \in \bigcup_{U \subset X \backslash M \text{ offen}} U \\ &\Leftrightarrow \quad a \notin \bigcap_{U \subset X \backslash M \text{ offen}} (X \backslash U) \\ &\Leftrightarrow \quad a \notin \bigcap_{A \supset M \text{ abgeschlossen}} A \qquad \qquad (\text{mit } A = X \backslash U). \end{aligned}$$

Damit gilt die in (b) behauptete Formel, und $\overline{M}$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Ist weiterhin M selbst abgeschlossen, so ist M eine der Mengen, über die hier der Durchschnitt gebildet wird, und somit ist dieser Durchschnitt (also $\overline{M}$) gleich M.

(c) Die Bedingung $a \notin \partial M$ bedeutet genau, dass es eine offene Menge U mit $a \in U$ gibt, für die entweder $U \subset M$ oder $U \subset X \backslash M$ ist. Falls $a \in M$ gilt, kann hierbei wegen $a \in U$ natürlich nur die Alternative $U \subset M$ auftreten. Also ist $a \in M \backslash \partial M$ genau dann, wenn es eine offene Menge U mit $a \in U \subset M$ gibt, also wenn $a \in \mathring{M}$.

(d) „$\subset$“: Ist $a \in \overline{M}$ und $a \notin M$, so enthält jede offene Menge U mit $a \in U$ nicht nur einen Punkt aus M, sondern auch den Punkt $a \in X \backslash M$. Also ist dann $a \in \partial M$. Die Inklusionen $M \subset \overline{M}$ und $\partial M \subset \overline{M}$ für die Rückrichtung „$\supset$“ folgen sofort aus den Definitionen.

(e) Die Gleichung folgt sofort aus (c) und (d); der Rand ∂M ist dann als Durchschnitt der nach (a) und (b) abgeschlossenen Mengen $\overline{M}$ und $X \backslash \mathring{M}$ abgeschlossen. □

Beispiel 1.21. Wir betrachten die Teilmenge $M = [0,1]$ von $X = \mathbb{R}$. Was der Rand von M in X ist, hängt sehr von der betrachteten Topologie ab:

(a) Wählen wir auf $\mathbb{R}$ die Standardtopologie, so ist natürlich $\partial M = \{0,1\}$.

(b) Wählen wir auf $\mathbb{R}$ die diskrete Topologie, ist also jede Menge offen und abgeschlossen, so gilt $\mathring{M} = \overline{M} = M$ und damit $\partial M = \overline{M} \backslash \mathring{M} = \emptyset$ nach Lemma 1.20. In der Tat kann man auch direkt sehen, dass kein Punkt $a \in \mathbb{R}$ ein Randpunkt irgendeiner Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein kann, weil $\{a\}$ eine offene Umgebung von a ist, die natürlich nicht gleichzeitig einen Punkt aus der Menge und aus dem Komplement der Menge enthalten kann.

(c) Wählen wir auf $\mathbb{R}$ dagegen die indiskrete Topologie, so folgt aus den Formeln in Lemma 1.20 (a) und (b) sofort $\mathring{M} = \emptyset$ und $\overline{M} = \mathbb{R}$ (denn die einzige offene Menge, die in M liegt, ist $\emptyset$, und die einzige abgeschlossene Menge, die M enthält, ist $\mathbb{R}$). Damit ist $\partial M = \mathbb{R}$ nach Lemma 1.20 (e).

(d) Wählen wir auf $\mathbb{R}$ schließlich die Sorgenfrey-Topologie aus Beispiel 1.17, so gibt es zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ offensichtlich ein $\varepsilon > 0$, so dass $[a, a+\varepsilon)$ entweder ganz in M oder ganz in $X \backslash M$ liegt — keiner dieser Punkte $a \in \mathbb{R}$ kann also ein Randpunkt von M sein. Allerdings ist 1 nach Bemerkung 1.19 ein Randpunkt von M, denn jede basis-offene Menge $[a,b)$, die 1 enthält (also für die $a \leq 1 < b$ gilt), enthält auch einen Punkt größer als 1, der damit nicht mehr in M liegt. Also ist hier $\partial M = \{1\}$.

Man kann an diesen Beispielen übrigens auch eine anschauliche Interpretation ablesen, warum Topologien mit mehr bzw. weniger offenen Mengen feiner bzw. gröber heißen (siehe Definition 1.1): Bilden wir von M z. B. in der gröbsten möglichen Topologie, der indiskreten Topologie in (c), das Innere bzw. den Abschluss, d. h. „nehmen wir lediglich die Randpunkte weg oder mit hinzu“, so verhält sich diese Topologie in der Tat sehr „grob“ und man erhält sofort die leere Menge bzw. den ganzen Raum. Die diskrete Topologie in (b) ist hingegen so „fein“, dass beim Weg- oder Hinzunehmen der Randpunkte überhaupt nichts passiert.

Aufgabe 1.22. Man beweise oder widerlege: Für zwei Teilmengen A und B eines topologischen Raumes gilt

(a) $(A \cup B)^\circ \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$;

(b) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$;

(c) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Untersuche jeweils auch die umgekehrten Inklusionen bzw. die Gleichheit!

Aufgabe 1.23. Es seien X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \geq 0$. Wir betrachten die abgeschlossene Kugel $K := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ um a mit Radius r. Man zeige:

(a) Ist X sogar ein normierter Raum, also $d(x,y) = ||x-y||$ für eine Norm $||\cdot||$ auf einem reellen Vektorraum X, und ist X nicht der Nullvektorraum, so ist der Rand ∂K von K wie erwartet die Menge $\{x \in X : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem beliebigen metrischen Raum ist dies in der Regel jedoch falsch.

Aufgabe 1.24 (Ein topologisches Spiel)**.** Wir starten mit einer gegebenen Menge $M \subset \mathbb{R}$. Ausgehend von dieser Menge dürfen wir jetzt neue Teilmengen von $\mathbb{R}$ konstruieren, indem wir von M oder bereits vorher konstruierten Mengen entweder das Komplement oder den Abschluss (in der Standardtopologie) bilden. Starten wir z. B. mit der Menge $M = [0,1]$, so ist deren Komplement gleich $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$, von dieser Menge der Abschluss gleich $(-\infty,0] \cup [1,\infty)$, und davon wiederum das Komplement gleich $(0,1)$. Man überprüft schnell, dass weitere Komplemente oder Abschlüsse dieser vier konstruierten Mengen nicht mehr zu neuen Mengen führen. Ausgehend von M konnten wir hier also insgesamt vier verschiedene Mengen erzeugen.

Das Ziel ist es nun, eine Startmenge M zu finden, aus der ihr durch Komplemente und Abschlüsse *möglichst viele* verschiedene Teilmengen von $\mathbb{R}$ bilden könnt. Durch geschickte Wahl von M kann man deutlich mehr als vier Mengen bekommen — wer erreicht die meisten?