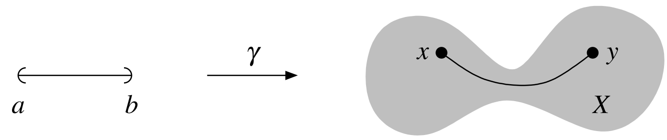
3. Zusammenhang

Eine der anschaulichsten Eigenschaften eines topologischen Raumes ist wahrscheinlich, ob er „zusammenhängend“ ist oder aus mehreren Teilen besteht. Wir wollen dieses Konzept des Zusammenhangs nun mathematisch exakt einführen. Es stellt sich heraus, dass es zwei ganz verschiedene Arten gibt, es zu definieren.

Definition 3.1 (Wegzusammenhängende und zusammenhängende Räume)**.** Es sei X ein topologischer Raum.

(a) X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jeder Wahl von zwei Punkten $x,y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt (wobei das abgeschlossene reelle Intervall $[a,b]$ mit der Standardtopologie versehen ist). Eine solche Abbildung nennt man einen **Weg** von x nach y.



(b) X heißt **zusammenhängend**, wenn man X *nicht* als disjunkte Vereinigung $X = U \cup V$ von zwei nicht-leeren offenen Teilmengen $U,V \subset X$ schreiben kann.

Oft werden wir auch sagen, dass eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend ist. Dies ist dann natürlich so zu verstehen, dass der topologische Raum A mit der Teilraumtopologie (siehe Konstruktion 1.6) die entsprechende Eigenschaft hat.

Bemerkung 3.2.

(a) Das Konzept des Wegzusammenhangs erlaubt eine naheliegende Verfeinerung: Auf einem topologischen Raum X ist die Relation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y$$

offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen dieser Relation nennt man **Wegzusammenhangskomponenten**. Mit dieser Definition ist der Raum X also genau dann wegzusammenhängend, wenn er genau eine Wegzusammenhangskomponente besitzt (die dann ganz X ist).

(b) Ist X in Definition 3.1 (b) die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen U und V, so ist natürlich $V = X \backslash U$. Die Bedingung, dass U und V offen sind, ist also äquivalent dazu, dass U gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. Wir können Definition 3.1 (b) damit auch so umformulieren: Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die Idee hinter der Definition 3.1 (a) eines wegzusammenhängenden Raumes ist natürlich sofort einleuchtend und vermutlich auch schon aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannt [G2, Definition 24.27]. Sie wirkt aus topologischer Sicht jedoch recht unnatürlich, da sie die Standardtopologie von reellen Intervallen, also topologische Eigenschaften eines willkürlich gewählten Beispielraums benutzt. Diesen Nachteil hat die Definition 3.1 (b) des Zusammenhangs nicht — dafür ist bei ihr aber anschaulich zunächst einmal überhaupt nicht klar, wieso die Existenz von gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen etwas damit zu tun haben soll, ob ein Raum „aus mehreren Teilen besteht“. Wir wollen die beiden eingeführten Zusammenhangsbegriffe daher zunächst anhand von ein paar Beispielen untersuchen.

Beispiel 3.3.

(a) Ein abgeschlossenes Intervall $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist natürlich wegzusammenhängend, da sich zwei beliebige Punkte $x, y \in [a,b]$ immer durch einen Weg miteinander verbinden lassen, z. B. mit $\gamma\colon [0,1] \to [a,b]$, $\gamma(t) = x + t(y-x)$.

In der Tat ist $[a,b]$ auch zusammenhängend: Gäbe es nämlich eine Darstellung $[a,b] = U \cup V$ mit disjunkten und in $[a,b]$ offenen Teilmengen U und V, so wäre die Abbildung

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in U, \\ 1 & \text{für } x \in V \end{cases}$$

wohldefiniert und nach Satz 2.4 (b) stetig — im Widerspruch zum Zwischenwertsatz [G2, Satz 8.22].

Andere Intervalle in $\mathbb{R}$ (offene, halboffene, uneigentliche) sind natürlich mit denselben Argumenten ebenfalls sowohl wegzusammenhängend als auch zusammenhängend.

(b) Die rationalen Zahlen $X = \mathbb{Q}$ sind nicht wegzusammenhängend: Sind $a, b \in \mathbb{Q}$ verschieden, so muss jeder Weg von a nach b nach dem Zwischenwertsatz [G2, Satz 8.22] auch alle irrationalen Zahlen zwischen a und b treffen, kann also nicht ganz in X liegen. Damit ist jeder Punkt von X seine eigene Wegzusammenhangskomponente.

Wegen der disjunkten offenen Zerlegung

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$$

ist $\mathbb{Q}$ auch nicht zusammenhängend.

In den bisher betrachteten Beispielen waren die Eigenschaften „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ gleichwertig. Der folgende Satz zeigt, dass dies in der Tat oft der Fall ist (wenn auch nicht immer, wie wir in Beispiel 3.8 sehen werden).

Satz 3.4 (Wegzusammenhang und Zusammenhang)**.** *Es sei X ein topologischer Raum.*

(a) *Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.*

(b) *Ist X zusammenhängend und besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung, so ist X auch wegzusammenhängend.*

Beweis.

(a) Angenommen, X wäre nicht zusammenhängend, d. h. wir könnten $X = U \cup V$ als disjunkte Vereinigung nicht-leerer offener Mengen schreiben. Wir wählen Punkte $x \in U$ und $y \in V$. Da X als wegzusammenhängend vorausgesetzt ist, gibt es nun einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ von x nach y. Wegen $X = U \cup V$ ist dabei natürlich

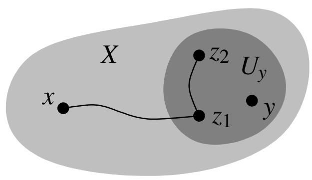
$$[a,b] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V).$$

Diese Vereinigung ist disjunkt, da U und V es sind. Die beiden vereinigten Mengen sind auch beide nicht leer (da sie den Punkt a bzw. b enthalten) und nach Satz 2.4 (b) offen. Damit müsste $[a,b]$ unzusammenhängend sein, im Widerspruch zu Beispiel 3.3 (a).

(b) Wir fixieren einen Punkt $x \in X$ und betrachten die zugehörige Wegzusammenhangskomponente

$$U := \{y \in X : \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Es seien nun $y \in X$ beliebig und U_y eine wegzusammenhängende Umgebung von y. Beachte, dass wir dann entweder keinen oder alle Punkte von U_y durch einen Weg mit x verbinden können: Sind nämlich wie im Bild rechts $z_1, z_2 \in U_y$ und gibt es einen Weg von x nach z_1, so können wir daran einen Weg von z_1 nach z_2 anfügen (der ja existieren muss, weil U_y wegzusammenhängend ist) und erhalten auch einen von x nach z_2.



Also liegt U_y entweder komplett in U oder komplett in $X\backslash U$. Weil dies für alle y gilt, sind damit sowohl U als auch $X\backslash U$ offen. Da X aber als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, muss nun in der disjunkten offenen Zerlegung $X = U \cup (X\backslash U)$ eine der beiden Mengen leer sein. Wegen $x \in U$ kann dies nicht U sein. Damit ist $X\backslash U = \emptyset$, d. h. es ist $U = X$ und wir können jeden Punkt in X durch einen Weg mit x verbinden. Also ist X wegzusammenhängend. □

Bemerkung 3.5. Die Zusatzbedingung in Satz 3.4 (b), dass jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, ist z. B. für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ stets erfüllt. In diesem Fall stimmen die Begriffe „wegzusammenhängend" und „zusammenhängend" also überein. Wie schon angekündigt werden wir allerdings in Beispiel 3.8 gleich noch sehen, dass diese beiden Begriffe im Allgemeinen verschieden sind. Um die Zusammenhangseigenschaften in diesem Beispiel besser untersuchen zu können, wollen wir aber zunächst noch zwei Aussagen beweisen, die generell nützlich sind, um herauszufinden, ob ein gegebener Raum wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend ist oder nicht. Das erste ist einfach die anschauliche Aussage, dass ein zusammenhängender Raum durch eine stetige Abbildung nicht „auseinander gerissen", also unzusammenhängend gemacht werden kann.

Lemma 3.6. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.*

(a) *Ist X wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.*

(b) *Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis.

(a) Es seien $x, y \in f(X)$, also $x = f(x')$ und $y = f(y')$ für gewisse $x', y' \in X$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = x'$ und $\gamma(b) = y'$. Der Weg $f \circ \gamma\colon [a,b] \to f(X)$ verbindet dann die Punkte x und y miteinander.

(b) Angenommen, $f(X)$ wäre unzusammenhängend, d. h. es gäbe eine disjunkte Vereinigung $f(X) = U \cup V$ mit nicht-leeren und in $f(X)$ offenen Mengen U und V. Dann wäre auch $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ eine disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen (siehe Satz 2.4 (b)). Dies ist ein Widerspruch dazu, dass X als zusammenhängend vorausgesetzt wurde. □

Das zweite Lemma, das wir noch benötigen, ist zwar auch einfach, aber schon weit weniger anschaulich — und in der Tat auch einer der Punkte, in denen sich Wegzusammenhang und Zusammenhang unterschiedlich verhalten.

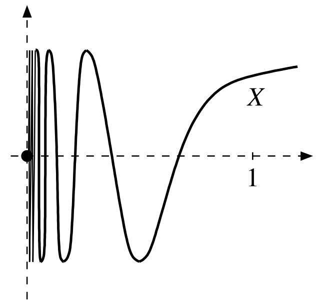
Lemma 3.7. *Es sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Weiterhin sei $B \subset X$ eine Teilmenge mit $A \subset B \subset \overline{A}$, d. h. B entstehe aus A durch Hinzunehmen einiger Randpunkte.*

Ist dann A zusammenhängend, so auch B.

(Die entsprechende Aussage für „wegzusammenhängend" ist falsch, wie wir in Beispiel 3.8 (b) sehen werden.)

Beweis. Wäre B unzusammenhängend, so gäbe es eine disjunkte Zerlegung $B = U \cup V$ in nicht-leere und in B offene Teilmengen U und V. Die Mengen U und V enthalten wegen $B \subset \overline{A}$ also einen Berührpunkt von A und müssen nach Definition 1.18 (b) damit auch einen Punkt von A enthalten, d. h. $A \cap U$ und $A \cap V$ sind nicht leer. Schneiden wir die Zerlegung $B = U \cup V$ also mit A, erhalten wir die disjunkte Zerlegung $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ in zwei nicht-leere Teilmengen, die in der Teilraumtopologie von A offen sind. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass wir A als zusammenhängend vorausgesetzt haben. □

Beispiel 3.8 (Ein zusammenhängender, aber nicht wegzusammenhängender Raum)**.** Der folgende Raum ist wohl eines der einfachsten Beispiele dafür, dass die Begriffe des Wegzusammenhangs und des Zusammenhangs i. A. verschieden sind: Es sei



$$X = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \cos\frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt:

(a) X ist zusammenhängend: Nach Beispiel 3.3 (a) ist $\mathbb{R}_{>0}$ zusammenhängend, nach Lemma 3.6 (b) also auch das Bild von $\mathbb{R}_{>0}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto (x, \cos\frac{1}{x})$, d. h. der Raum $X\backslash\{(0,0)\}$. Das Hinzufügen des Randpunktes $(0,0)$ ändert nach Lemma 3.7 nun ebenfalls nichts mehr am Zusammenhang dieser Menge.

(b) X ist nicht wegzusammenhängend: Andernfalls gäbe es einen Weg $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = (0,0)$ und $\gamma(b) = (1, \cos 1)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ nun $x_n \in [a,b]$ mit $\gamma_1(x_n) = \frac{1}{2\pi n}$ und damit $\gamma_2(x_n) = \cos(2\pi n) = 1$; insbesondere gilt also $\gamma_1(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß [G2, Satz 6.49] können wir nun aus der Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) auswählen; es sei $x \in [a,b]$ ihr Grenzwert. Wegen der Stetigkeit von γ gilt dann $\gamma(x) = \lim_{k\to\infty}(\gamma_1(x_{n_k}), \gamma_2(x_{n_k})) = (0,1) \notin X$, was ein Widerspruch ist.

Beachte, dass dieses Argument auch zeigt, dass die Aussage von Lemma 3.7 nicht auch analog für wegzusammenhängende Mengen gelten kann — andernfalls könnte man nämlich das Argument von (a) wörtlich genauso auch für „wegzusammenhängend“ aufschreiben und würde im Widerspruch zu unserem gerade gezeigten Resultat erhalten, dass X auch wegzusammenhängend ist.

Beispiel 3.9. Mit Hilfe des (Weg-)Zusammenhangs können wir nun in einigen Fällen bereits zeigen, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind. Offensichtlich ist natürlich, dass ein zusammenhängender Raum nicht zu einem unzusammenhängenden homöomorph sein kann; analog gilt das auch für den Wegzusammenhang. Mit einem kleinen Trick kann man aus dieser Idee aber noch etwas mehr herausholen:

(a) Die reelle Gerade $\mathbb{R}^1$ ist nicht homöomorph zu einem anderen $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$: Angenommen, es gäbe einen solchen Homöomorphismus $f \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$. Nehmen wir dann aus $\mathbb{R}^1$ den Nullpunkt heraus, würden wir durch Einschränken von f natürlich auch einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$ nach $\mathbb{R}^n\backslash\{f(0)\}$ bekommen. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend, während $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$ offensichtlich auch nach Herausnahme eines Punktes noch wegzusammenhängend ist (siehe Bild unten für $n = 2$).

(b) Das Achsenkreuz $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ in $\mathbb{R}^2$ ist nicht zur reellen Gerade $\mathbb{R}$ homöomorph: Das Argument ist hier analog zu dem in (a). Nehmen wir nämlich aus X den Nullpunkt heraus, so erhalten wir vier Wegzusammenhangskomponenten, während $\mathbb{R}$ nach Herausnehmen eines Punktes P in nur zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfällt.

$\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$ nicht wegzusammenhängend | $\mathbb{R}^2\backslash\{f(0)\}$ wegzusammenhängend | $X\backslash\{(0,0)\}$ vier Wegzusammenhangskomponenten | $\mathbb{R}\backslash\{P\}$ zwei Wegzusammenhangskomponenten

(a) (b)

Aufgabe 3.10. Zeige, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend ist, wenn in ihm „der Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$ gilt“, d. h. wenn zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ und je zwei Punkten $x, y \in X$ jeder Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ von f auf X angenommen wird.

Aufgabe 3.11. Anschaulich erklärt man Stetigkeit ja oft so, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Beweise die folgende mathematisch exakte Version dieser Aussage: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph

$$\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

wegzusammenhängend ist.