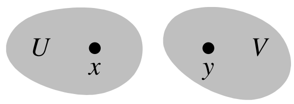
4. Trennung und Kompaktheit

In diesem Kapitel wollen wir zwei weitere wichtige und miteinander zusammenhängende Eigenschaften topologischer Räume untersuchen — nämlich die Frage, welche Mengen sich durch offene Mengen trennen lassen, und die euch aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits bekannte Kompaktheit. Wir beginnen mit der wohl einfachsten und wichtigsten Trennungseigenschaft.

Definition 4.1 (Hausdorff-Räume)**.** Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff-Raum**, wenn es zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten $x,y \in X$ stets offene Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Man sagt in diesem Fall auch, dass sich Punkte von X durch offene Mengen trennen lassen.



Bemerkung 4.2. Ist die Topologie auf X durch eine Basis gegeben, so enthält jede offene Umgebung eines Punktes auch eine basis-offene Umgebung. Wir können in Definition 4.1 dann also genauso gut verlangen, dass sich Punkte von X durch basis-offene Mengen trennen lassen.

Beispiel 4.3.

(a) Jeder metrische Raum X ist ein Hausdorff-Raum: Sind $x,y \in X$ mit $x \neq y$ und wählen wir $\varepsilon \leq \frac{1}{2}d(x,y)$, so sind die ε-Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(y)$ um x und y disjunkte Umgebungen dieser Punkte. Wäre nämlich $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$, also $d(z,x) < \varepsilon$ und $d(z,y) < \varepsilon$, so würde aus der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon \leq d(x,y)$$

folgen.

(b) Jede Teilmenge Y eines Hausdorff-Raumes X ist selbst wieder ein Hausdorff-Raum: Sind U und V trennende Umgebungen in X von zwei verschiedenen Punkten $x,y \in Y$, so sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ trennende Umgebungen dieser Punkte in der Relativtopologie von Y.

(c) Die indiskrete Topologie auf einer beliebigen Menge X mit mehr als einem Punkt ist niemals eine Hausdorff-Topologie, da zu jedem Punkt $x \in X$ der gesamte Raum X die einzige Umgebung von x ist. Ebenso sind die Komplement-endlich-Topologie auf einer unendlichen Menge und die Komplement-abzählbar-Topologie auf einer überabzählbaren Menge keine Hausdorff-Topologien (siehe Beispiel 1.5 (c)), da hier zwei beliebige nicht-leere offene Mengen stets einen Schnittpunkt besitzen.

03

Wir sehen also schon, dass die meisten in der Praxis vorkommenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft besitzen. Bevor wir untersuchen, welche schönen Folgerungen sich aus dieser Eigenschaft ergeben, wollen wir zunächst noch eine oft benutzte, dazu äquivalente Bedingung angeben.

Lemma 4.4 (Hausdorff = Diagonale ist abgeschlossen)**.** *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die* ***Diagonale***

$$\Delta_X := \{(x,x) : x \in X\} \quad \subset X \times X$$

abgeschlossen ist (in der Produkttopologie von $X \times X$).

Beweis. Dies ist letztlich nur eine einfache Umformulierung der Bedingung aus Definition 4.1: Es gilt

$$\begin{aligned} & X \text{ ist Hausdorff-Raum} \\ \Leftrightarrow\ & \text{für alle } x,y \in X \text{ mit } x \neq y \text{ gibt es } U,V \subset X \text{ offen mit } x \in U,\ y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \text{für alle } (x,y) \in (X \times X)\backslash\Delta_X \text{ gibt es } U,V \subset X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subset (X \times X)\backslash\Delta_X \\ \Leftrightarrow\ & (X \times X)\backslash\Delta_X \text{ ist offen} \\ & \qquad \text{(denn die Mengen der Form } U \times V \text{ bilden eine Basis der Produkttopologie)} \\ \Leftrightarrow\ & \Delta_X \text{ ist abgeschlossen.} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.5 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen)**.** *Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann gilt:*

(a) *Sind $f,g\colon Y \to X$ zwei stetige Abbildungen von einem weiteren topologischen Raum Y nach X, so ist die Menge $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ abgeschlossen (und $\{y \in Y : f(y) \neq g(y)\}$ damit offen).*

(b) *Für alle $a \in X$ ist die einpunktige Menge $\{a\} \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis.

(a) Da X ein Hausdorff-Raum ist, ist die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ nach Lemma 4.4 abgeschlossen. Die Menge $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ ist nun aber genau das Urbild dieser Diagonalen unter der gemäß Lemma 2.11 (b) stetigen Abbildung $(f,g)\colon Y \to X \times X,\ y \mapsto (f(y),g(y))$, also abgeschlossen nach Satz 2.4 (e).

(b) Dies ergibt sich sofort aus (a), angewendet auf die offensichtlich stetigen Abbildungen $f\colon X \to X,\ x \mapsto x$ und $g\colon X \to X,\ x \mapsto a$. □

Bemerkung 4.6 (Eindeutigkeit von Grenzwerten in Hausdorff-Räumen)**.**

(a) Die aus den „Grundlagen der Mathematik“ für metrische Räume bereits bekannte Eigenschaft aus Lemma 4.5 (a), dass durch Gleichungen zwischen stetigen Funktionen definierte Mengen abgeschlossen sind [G2, Beispiel 24.21], lässt sich auch so interpretieren, dass Funktionsgrenzwerte in Hausdorff-Räumen stets eindeutig sind. Dazu sei $f\colon D \to X$ eine Abbildung von einer Teilmenge D eines topologischen Raumes Y in einen Hausdorff-Raum X. Ist dann $a \in \overline{D}\backslash D$ und sind $f_1,f_2\colon D \cup \{a\} \to X$ zwei stetige Fortsetzungen von f nach a (so dass man ihre Funktionswerte $f_1(a)$ und $f_2(a)$ also als Grenzwerte von f für $x \to a$ auffassen kann), so besagt Lemma 4.5 (a) genau, dass $\{y \in D \cup \{a\} : f_1(y) = f_2(y)\}$ abgeschlossen ist, also mit D auch den Punkt a enthält: Es ist $f_1(a) = f_2(a)$, d. h. es gibt höchstens eine stetige Fortsetzung von f nach a.

(b) Analog dazu sind in einem Hausdorff-Raum X auch Folgengrenzwerte eindeutig: Sind U und V trennende Umgebungen zweier Punkte $x,y \in X$, so kann mit der üblichen Grenzwertdefinition offensichtlich keine Folge sowohl x als auch y als Grenzwert haben, da nicht gleichzeitig fast alle Folgenglieder sowohl in U als auch in V liegen können.

Insgesamt zeigen uns Lemma 4.5 und Bemerkung 4.6 also, dass die Hausdorff-Bedingung viele wünschenswerte Eigenschaften sicherstellt. Die allermeisten Räume, die wir ab jetzt betrachten werden, werden daher Hausdorff-Räume sein, und etliche Sätze werden diese Bedingung auch als Voraussetzung haben.

Als Nächstes wollen wir uns nun mit dem wichtigen Begriff der Kompaktheit beschäftigen, den ihr ja bereits aus den „Grundlagen der Mathematik“ kennt. Dort habt ihr gezeigt, dass für Teilmengen K von $\mathbb{R}^n$ die folgenden drei Eigenschaften äquivalent sind [G2, Satz 23.50 und 23.57], und solche Mengen dann *kompakt* genannt:

(a) K ist beschränkt und abgeschlossen.

(b) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K.

(c) Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung.

Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, bleibt von diesen Äquivalenzen in allgemeinen topologischen Räumen leider nicht mehr viel übrig. In der Tat lässt sich die Beschränktheit in Bedingung (a) natürlich überhaupt nur in metrischen Räumen formulieren, und von der in $\mathbb{R}^n$ geltenden Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$ (c) sind in beliebigen topologischen Räumen sogar beide Richtungen falsch. Da wir in Aufgabe 2.10 schon gesehen haben, dass Folgen im Allgemeinen nicht die erwarteten Resultate liefern, ist also klar, dass (c) für allgemeine topologische Räume die „richtige“ Definition der Kompaktheit sein muss (obwohl es natürlich die unanschaulichste von ihnen ist).

Definition 4.7 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn gilt: Ist J eine beliebige Indexmenge und sind U_i für $i \in J$ offene Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i\in J} U_i$, so gibt es bereits eine *endliche* Teilmenge $J' \subset J$ mit $X = \bigcup_{i\in J'} U_i$. (Man sagt: „Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung“.)

Bemerkung 4.8.

(a) Es ist wichtig zu verstehen, dass Kompaktheit eine Eigenschaft eines topologischen Raumes, und nicht (wie z. B. Offenheit oder Abgeschlossenheit) einer Teilmenge eines topologischen Raumes ist.

Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X, so definieren wir die Kompaktheit von A also über die Teilraumtopologie von A. Mit anderen Worten ist $A \subset X$ damit kompakt, wenn es zu jeder Überdeckung $A = \bigcup_{i\in J}(A\cap U_i)$ durch in A offene Mengen $A\cap U_i$ (mit U_i offen in X) eine endliche Teilüberdeckung $A = \bigcup_{i\in J'}(A\cap U_i)$ gibt. Offensichtlich ist dies äquivalent dazu, dass es im Fall $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ eine endliche Menge $J' \subset J$ mit $A \subset \bigcup_{i\in J'} U_i$ gibt. In dieser Form — bei der die Vereinigung der offenen Mengen A enthalten, aber nicht gleich A sein muss — habt ihr die Kompaktheit von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ vermutlich bisher kennengelernt.

(b) Analog zur Hausdorff-Eigenschaft genügt es im Fall eines durch eine Basis gegebenen topologischen Raumes X, die Überdeckungseigenschaft für basis-offene Mengen zu überprüfen. In jeder offenen Überdeckung von X ist nämlich jede dieser Mengen selbst wieder eine Vereinigung basis-offener Mengen, so dass wir also letztlich eine Überdeckung durch basis-offene Mengen gegeben haben. Natürlich genügt es dann zu zeigen, dass bereits endlich viele dieser basis-offenen Mengen X überdecken, weil ja jede von ihnen in einer der ursprünglich gegebenen offenen Mengen enthalten ist und daher dann auch diese endlich vielen entsprechenden ursprünglichen Mengen den Raum überdecken.

(c) In der Literatur nennt man einen topologischen Raum X mit der Eigenschaft aus Definition 4.7 statt kompakt manchmal nur *quasikompakt*, und definiert einen kompakten Raum dann als einen quasikompakten Hausdorff-Raum.

Beispiel 4.9.

(a) Wie oben schon erwähnt, wissen wir aus den „Grundlagen der Mathematik“, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist [G2, Satz 23.57].

(b) Ein endlicher Raum sowie einer mit der indiskreten Topologie ist stets trivialerweise kompakt; ein unendlicher mit der diskreten Topologie hingegen niemals (da die Überdeckung durch die einelementigen offenen Mengen $\{x\}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt).

(c) Da die Kompaktheit eine Eigenschaft eines topologischen Raumes ist (und nicht einer Teilmenge eines Raumes, siehe Bemerkung 4.8 (a)), können wir sie verwenden, um Räume als nicht homöomorph zu erkennen. So ist z. B. das kompakte Intervall $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ nicht homöomorph zum offenen Intervall $(0,1)$, da letzteres nicht kompakt ist. Das halboffene Intervall $[0,1)$ ist ebenfalls nicht homöomorph zum offenen Intervall $(0,1)$: z. B. weil der Raum $[0,1)$ im Gegensatz zu $(0,1)$ die Eigenschaft hat, dass man ihn als disjunkte Vereinigung zweier wegzusammenhängender Mengen schreiben kann, von denen eine kompakt ist (nämlich als $[0,1) = [0,\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2},1)$).

Wir wollen nun sehen, welche der aus den Grundlagen der Mathematik bekannten Eigenschaften kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ auf beliebige kompakte Räume übertragbar sind. Wir beginnen mit zwei Aussagen, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben.

Satz 4.10 (Eigenschaften kompakter Räume)**.** *Es sei X ein kompakter topologischer Raum.*

(a) *Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen weiteren topologischen Raum Y, so ist auch $f(X) \subset Y$ kompakt.*

(b) *Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ist kompakt.*

Beweis.

(a) Es seien $U_i \subset Y$ offen für $i \in J$ mit $f(X) \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ (siehe Bemerkung 4.8 (a)). Dann bilden die nach Satz 2.4 (b) offenen Mengen $f^{-1}(U_i)$ für $i \in J$ eine Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X gibt es daher eine endliche Indexmenge $J' \subset J$ mit $X = \bigcup_{i\in J'} f^{-1}(U_i)$, also auch mit $f(X) \subset \bigcup_{i\in J'} U_i$. Damit ist $f(X)$ kompakt.

(b) Wie in Bemerkung 4.8 (a) seien $U_i \subset X$ offen für $i \in J$ mit $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. Dann ist

$$(X\backslash A) \cup \bigcup_{i\in J} U_i$$

eine offene Überdeckung von X, aus der wir wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung

$$(X\backslash A) \cup \bigcup_{i\in J'} U_i$$

von X auswählen können. Da hierbei kein Punkt aus A von der ersten Menge $X\backslash A$ überdeckt wird, muss jeder Punkt von A in einem U_i mit $i \in J'$ enthalten sein. Also ist $A \subset \bigcup_{i\in J'} U_i$, d. h. A ist kompakt. □

Den folgenden Satz, dass Produkte kompakter Mengen kompakt sind, erhält man ebenfalls aus einer geeigneten Anwendung der Überdeckungseigenschaft auf beide Faktoren. Wir beweisen ihn gleich in einer etwas allgemeineren Version, die wir im darauf folgenden Satz noch benötigen werden.

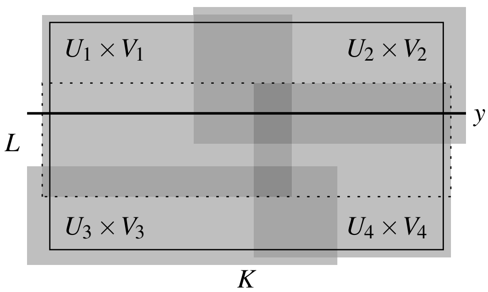
Satz 4.11 (Produkte kompakter Mengen sind kompakt)**.** *Es seien K und L zwei kompakte Teilmengen in topologischen Räumen X bzw. Y. Sind dann J eine beliebige Indexmenge und $W_i \subset X \times Y$ offen für $i \in J$ mit $K \times L \subset \bigcup_{i\in J} W_i$, so gibt es eine endliche Menge $J' \subset J$ und offene Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit*

$$K \times L \subset U \times V \subset \bigcup_{i\in J'} W_i.$$

Insbesondere sind Produkte kompakter Räume also kompakt.

Beweis. Wie in Bemerkung 4.8 (b) dürfen wir annehmen, dass die Mengen W_i basis-offen in der Produkttopologie sind, also die Form $W_i = U_i \times V_i$ für offene Mengen $U_i \subset X$ und $V_i \subset Y$ haben.

Das Bild rechts zeigt eine solche Situation (bei der wir allerdings aus hoffentlich verständlichen Gründen von vornherein nur endlich viele W_i eingezeichnet haben, so dass das Bild letztlich nur als schematische Hilfe angesehen werden kann, um die folgenden Konstruktionen zu verdeutlichen). Das durchgezogen gezeichnete Rechteck ist dabei $K \times L$, und dunkler gefärbte Gebiete deuten an, wo sich die Mengen W_i überlappen.



Für ein zunächst festes $y \in L$ betrachten wir die Menge $J_y := \{i \in J : y \in V_i\}$ aller Indizes, deren zugehörige Mengen W_i den horizontalen Schnitt $X \times \{y\}$ treffen; im Bild oben also z. B. $J_y = \{1, 2, 4\}$.

Dann ist $\bigcup_{i \in J_y} (U_i \times V_i)$ eine offene Überdeckung von $K \times \{y\}$, und damit $\bigcup_{i \in J_y} U_i$ eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, können wir also eine endliche Teilmenge $J'_y \subset J_y$ auswählen, so dass bereits $K \subset \bigcup_{i \in J'_y} U_i =: \tilde{U}_y$ ist (im Beispiel oben können wir z. B. $J'_y = \{1,4\}$ wählen).

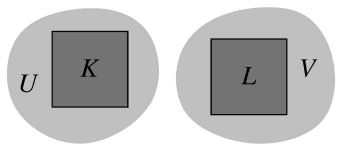
In $X \times Y$ überdecken die Quader $U_i \times V_i$ mit $i \in J'_y$ nun aber natürlich nicht nur $K \times \{y\}$, sondern sogar einen ganzen offenen Streifen $\tilde{U}_y \times \tilde{V}_y$ mit $\tilde{V}_y := \bigcap_{i \in J'_y} V_i$ (beachte, dass diese Menge offen ist, da wir nur endlich viele offene Mengen schneiden). Im Bild ist dieser Streifen mit einer gestrichelten Linie eingezeichnet.

Wegen $y \in \tilde{V}_y$ für alle $y \in L$ überdecken diese offenen Mengen $\tilde{V}_y$ aber die Menge L, und daher können wir wegen der Kompaktheit von L nun $y_1, \dots, y_n \in L$ wählen, so dass $L \subset \tilde{V}_{y_1} \cup \cdots \cup \tilde{V}_{y_n} =: V$. Die Mengen $U_i \times V_i$ für alle i in der endlichen Indexmenge $J'_{y_1} \cup \cdots \cup J'_{y_n}$ überdecken dann wie gewünscht die offene Menge $U \times V$ mit $U = \tilde{U}_{y_1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{y_n} \supset K$. □

Kombinieren wir diese Ergebnisse nun mit der Hausdorff-Eigenschaft, so erhalten wir noch die folgenden zwei weiteren wichtigen Aussagen.

Satz 4.12 (Kompakte Mengen in Hausdorff-Räumen)**.** *Es sei X ein Hausdorff-Raum.*

(a) *Sind K und L kompakte Teilmengen von X mit $K \cap L = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U \supset K$ und $V \supset L$ mit $U \cap V = \emptyset$. (In Hausdorff-Räumen lassen sich also nicht nur Punkte, sondern sogar kompakte Mengen durch offene Mengen trennen.)*



(b) *Jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist abgeschlossen.*

Beweis.

(a) Da X ein Hausdorff-Raum ist, ist die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ nach Lemma 4.4 abgeschlossen. Ihr Komplement $(X \times X) \backslash \Delta_X$ ist also offen und überdeckt wegen $K \cap L = \emptyset$ die Menge $K \times L$. In dieser Situation haben wir aber in Satz 4.11 (angewendet auf eine Überdeckung mit nur einer offenen Menge) gesehen, dass es offene Teilmengen $U \supset K$ und $V \supset L$ gibt mit $U \times V \subset (X \times X) \backslash \Delta_X$, also mit $U \cap V = \emptyset$.

(b) Für jedes $x \in X \backslash K$ ist die einpunktige Menge $\{x\}$ kompakt (siehe Beispiel 4.9 (b)) und lässt sich daher nach (a) von K durch offene Mengen trennen. Insbesondere gibt es also eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset X \backslash K$. Vereinigen wir alle diese Mengen miteinander, so erhalten wir wie gewünscht die offene Menge $\bigcup_{x \in X \backslash K} U_x = X \backslash K$. Also ist K abgeschlossen. □

Bemerkung 4.13. Ohne die Voraussetzung eines Hausdorff-Raumes ist die aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits bekannte Aussage aus Satz 4.12 (b) in der Regel falsch: In der indiskreten Topologie auf einer beliebigen Menge X ist jede Teilmenge $A \subset X$ kompakt (da die triviale Überdeckung, die nur aus der Menge X besteht, die einzige offene Überdeckung von A ist), aber außer $\emptyset$ und X ist keine Teilmenge abgeschlossen in X.

Setzen wir die Aussagen aus Satz 4.10 und 4.12 schließlich noch zusammen, so erhalten wir ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür, wann eine stetige und bijektive Abbildung bereits ein Homöomorphismus ist (siehe Bemerkung 2.15 (b)).

Folgerung 4.14. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ferner setzen wir voraus, dass X kompakt und Y ein Hausdorff-Raum ist. Dann ist auch f^{-1} stetig, d. h. f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 2.4 (c) genügt es zu zeigen, dass unter f^{-1} Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, d. h. dass unter f Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Es sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Da X kompakt ist, ist nach Satz 4.10 (b) dann auch A kompakt. Nach Satz 4.10 (a) ist damit $f(A)$ als Teilmenge von Y kompakt, und nach Satz 4.12 (b) ist diese Teilmenge dann auch abgeschlossen in Y. □

04

Beispiel 4.15. Wir erinnern uns noch einmal an die Peano-Kurve aus Satz 2.19 — eine stetige und surjektive Abbildung vom Einheitsintervall $I \subset \mathbb{R}$ in das Einheitsquadrat $I^2 \subset \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe von Folgerung 4.14 sehen wir nun, dass wir jedoch keine stetige und *bijektive* Abbildung zwischen diesen Mengen finden können: Da I kompakt und I^2 ein Hausdorff-Raum ist, müsste diese sonst nämlich auch ein Homöomorphismus sein, was wir aber in Beispiel 3.9 (a) bereits ausgeschlossen haben.

Aufgabe 4.16 (Einpunktkompaktifizierung)**.** Es sei X ein Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist. Wir wollen X in dieser Aufgabe durch Hinzunehmen eines „unendlich fernen Punktes“ zu einem kompakten Raum machen. Dazu setzen wir $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ (wobei „∞“ einfach nur der Name des neu hinzugefügten Punktes ist) sowie

$$\mathscr{T} := \{U : U \subset X \text{ offen}\} \cup \{\hat{X}\backslash K : K \subset X \text{ kompakt}\} \quad \subset \mathscr{P}(\hat{X}).$$

Man zeige:

(a) $\mathscr{T}$ ist eine Topologie auf $\hat{X}$.

(b) $\hat{X}$ ist mit dieser Topologie kompakt.

(c) Der Abschluss von X in $\hat{X}$ ist der gesamte Raum $\hat{X}$ (man sagt: X liegt *dicht* in $\hat{X}$).

(d) Besitzt jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung (man sagt: X ist *lokalkompakt*), so ist auch $\hat{X}$ ein Hausdorff-Raum.

Man nennt $\hat{X}$ die *Einpunktkompaktifizierung* von X. In der folgenden Aufgabe werden wir zwei Beispiele dazu untersuchen.

Aufgabe 4.17.

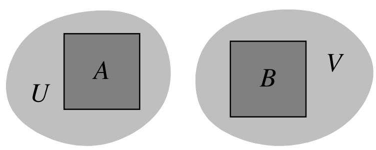
(a) Zeige, dass die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ wie in Aufgabe 4.16 homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.

(b) Es sei (x_n) eine Folge in einem topologischen Raum X. Wir können diese Folge dann natürlich auch als Funktion $f: \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n$ auffassen.

Zeige, dass die Folge (x_n) genau dann gegen ein $x \in X$ konvergiert, wenn sich diese Funktion f durch die Festsetzung $f(\infty) := x$ zu einer stetigen Funktion von der Einpunktkompaktifizierung $\hat{\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ nach X fortsetzen lässt.

Wir haben in Satz 4.12 (a) gesehen, dass sich in einem Hausdorff-Raum nicht nur Punkte, sondern auch kompakte Mengen durch offene Mengen trennen lassen. Derartige Trennungseigenschaften spielen in der Topologie eine wichtige Rolle. Wir wollen daher noch eine weitere solche Eigenschaft untersuchen, die letztlich auch interessante Schlussfolgerungen über stetige reellwertige Funktionen auf solchen Räumen zulassen wird (siehe Satz 4.24).

Definition 4.18 (Normale Räume)**.** Ein topologischer Raum X heißt **normal**, wenn es zu je zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ stets offene Mengen $U \supset A$ und $V \supset B$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$.



Bemerkung 4.19 (Abweichende Bezeichnungen in der Literatur)**.**

(a) Analog zur Kompaktheit (siehe Bemerkung 4.8 (c)) wird auch die Normalität eines topologischen Raumes in der Literatur manchmal so definiert, dass sie zusätzlich zur Bedingung aus Definition 4.18 noch die Hausdorff-Eigenschaft verlangt.

(b) Da es insgesamt viele verschiedene Trennungseigenschaften gibt, werden diese auch oft einfach nur durchnummeriert und mit T_i für verschiedene Zahlen i bezeichnet. In dieser Notation heißt dann z. B. die Hausdorff-Eigenschaft T_2 und die Normalität T_4, es gibt aber auch noch T_0, T_1, $T_{2\frac{1}{2}}$ und einige andere, die wir hier jedoch nicht behandeln wollen (und deren Bezeichnung auch nicht überall einheitlich ist) [Q, Kapitel 6].

Beispiel 4.20.

(a) Jeder metrische Raum ist normal; das Argument hierfür ist ähnlich zu dem für die Hausdorff-Eigenschaft in Beispiel 4.3 (a): Sind A und B abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es zunächst zu jedem $a \in A$ ein $\varepsilon_a > 0$ mit $U_{\varepsilon_a}(a) \subset X \backslash B$, da a in der offenen Menge $X \backslash B$ liegt. Analog gibt es zu jedem $b \in B$ ein $\delta_b > 0$ mit $U_{\delta_b}(b) \subset X \backslash A$. Dann sind die Mengen

$$U := \bigcup_{a \in A} U_{\frac{\varepsilon_a}{2}}(a) \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{b \in B} U_{\frac{\delta_b}{2}}(b)$$

als Vereinigungen offener Kugeln offen und enthalten natürlich A bzw. B. Außerdem ist $U \cap V = \emptyset$: Gäbe es ein Element $x \in U \cap V$, so wäre $d(x,a) < \frac{\varepsilon_a}{2}$ und $d(x,b) < \frac{\delta_b}{2}$ für gewisse $a \in A$ und $b \in B$. Ist nun ohne Einschränkung $\delta_b \leq \varepsilon_a$, so erhalten wir

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\delta_b}{2} \leq \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_a}{2} = \varepsilon_a$$

und damit $b \in U_{\varepsilon_a}(a)$ im Widerspruch zu $U_{\varepsilon_a}(a) \subset X \backslash B$. Damit ist also $U \cap V = \emptyset$, und wir haben wie gewünscht zwei trennende offene Mengen zu A und B gefunden.

(b) Kompakte Hausdorff-Räume sind stets normal, denn in ihnen sind abgeschlossene Mengen nach Satz 4.10 (b) kompakt und damit nach Satz 4.12 (a) durch offene Mengen trennbar.

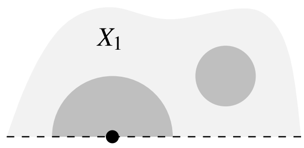
(c) Ein indiskreter Raum (mit mehr als einem Punkt) ist nach Beispiel 4.3 (c) zwar kein Hausdorff-Raum, aber trivialerweise normal (da es in ihm überhaupt keine zwei disjunkten, nicht-leeren abgeschlossenen Mengen gibt). Auch ein diskreter Raum ist trivialerweise normal, da wir hier stets $U = A$ und $V = B$ setzen können.

(d) Die reelle Gerade ist mit der Komplement-endlich-Topologie (siehe Beispiel 1.5 (c)) weder ein Hausdorff-Raum noch normal: In diesem Raum sind nämlich Punkte abgeschlossen, aber nicht durch offene Mengen trennbar, da zwei beliebige nicht-leere offene Mengen stets einen nicht-leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 4.21. Zeige, dass die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.17) normal ist.

Aufgabe 4.22. Wir betrachten die folgenden beiden topologischen Räume:

- $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, wobei die Topologie erzeugt wird von allen offenen Kreisschreiben, die die reelle Achse nicht treffen, und allen Mengen der Form
$$\{a\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } |z-a| < r\}$$
für $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.



- $X_2 = (0,1)$ mit außer $\emptyset$ und X_2 genau den offenen Mengen der Form $(\frac{1}{n}, 1)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

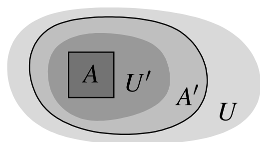
Ihr braucht nicht zu zeigen, dass es sich dabei wirklich um Topologien handelt. Benutzt diese Räume, um folgende Aussagen zu zeigen:

(a) Nicht jeder Hausdorff-Raum ist normal.

(b) Ein Raum X heißt *regulär* oder *T_3-Raum*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene Mengen $U \ni x$ und $V \supset A$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Diese Bedingung ist weder zur Hausdorff-Eigenschaft noch zur Normalität äquivalent.

Durch einen geeigneten Übergang zu Komplementen erhalten wir die folgende äquivalente Umformulierung der Normalitätsbedingung, die wir später noch benötigen werden.

Lemma 4.23. *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und offenen Menge U mit $A \subset U$ eine weitere abgeschlossene Menge A' und offene Menge U' gibt mit $A \subset U' \subset A' \subset U$.*



Beweis. Wir formulieren die Bedingung des Lemmas um, indem wir $B := X\backslash U$ und $V' := X\backslash A'$ setzen. Dabei sind U und V' dann natürlich genau dann offen, wenn B bzw. A' abgeschlossen sind. Da weiterhin $A \subset U$ äquivalent ist zu $A \cap (X\backslash U) = \emptyset$, besagt die gegebene Bedingung also genau: Zu abgeschlossenen Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es offene Mengen V' und U' mit $A \subset U'$, $U' \subset X\backslash V'$ (d. h. $U' \cap V' = \emptyset$) und $X\backslash V' \subset X\backslash B$ (d. h. $B \subset V'$). Dies ist offensichtlich exakt die Normalitätsbedingung aus Definition 4.18. □

Der entscheidende Grund, warum gerade die Trennbarkeit von abgeschlossenen Mengen wichtig ist, ist die folgende überraschende Äquivalenz dieser Eigenschaft zur Existenz gewisser stetiger, reellwertiger Funktionen.

Satz 4.24 (Lemma von Urysohn). *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

(a) *X ist normal.*

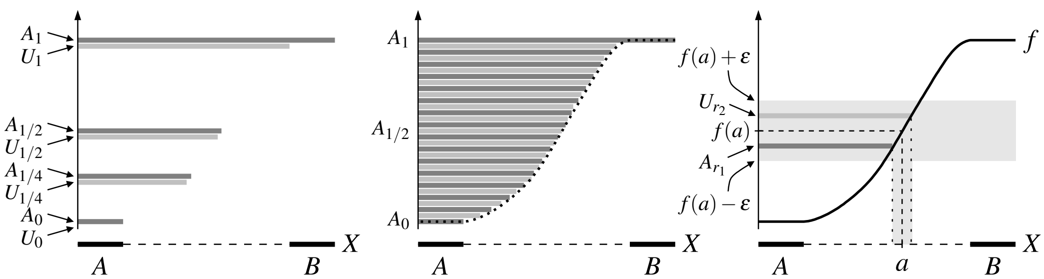
(b) *Zu je zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ in das Einheitsintervall (mit der Standardtopologie) mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. (Man sagt auch: „Abgeschlossene Mengen lassen sich durch stetige Funktionen trennen".)*

Beweis. Es seien $A, B \subset X$ zwei abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$.

„(a) ⇒ (b)": Wir konstruieren zunächst für alle $r \in I \cap \mathbb{Q}$ eine offene Menge $U_r \subset X$ und eine abgeschlossene Menge $A_r \subset X$ wie folgt. Als Erstes setzen wir $U_0 := \emptyset$, $A_0 := A$, $U_1 := X\backslash B$ und $A_1 := X$. Da die Menge $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ abzählbar ist [G2, Beispiel 5.58 (a)], können wir nun wegen der Normalität von X nach Lemma 4.23 rekursiv über eine solche Abzählung Mengen U_r und A_r für alle $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ finden mit

$$\begin{aligned} & U_r \subset A_r && \text{für alle } r \in I \cap \mathbb{Q} \\ \text{und}\quad & A_r \subset U_s && \text{für alle } r, s \in I \cap \mathbb{Q} \text{ mit } r < s. \end{aligned}$$

Beginnen wir die Abzählung von $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ z. B. mit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$, so würden wir nach Lemma 4.23 wie im Bild unten links zunächst $U_{1/2}$ und $A_{1/2}$ finden mit $A_0 \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_1$, und als Nächstes dann $U_{1/4}$ und $A_{1/4}$ mit $A_0 \subset U_{1/4} \subset A_{1/4} \subset U_{1/2}$. Auf diese Art bekommen wir rekursiv wie im mittleren Bild die gewünschten Mengen U_r und A_r für alle $r \in I \cap \mathbb{Q}$. Wir setzen ihren Indexbereich auf ganz $\mathbb{Q}$ fort, indem wir $U_r = A_r = \emptyset$ für $r < 0$ und $U_r = A_r = X$ für $r > 1$ setzen.



Die gesuchte Funktion f definieren wir nun als „Einhüllende" der Mengen A_r, also als

$$f\colon X \to I,\ x \mapsto \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}.$$

Die Menge, von der hier das Infimum gebildet wird, ist offensichtlich stets eine Teilmenge von $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ und enthält $\mathbb{Q}_{\geq 1}$; sie ist darüber hinaus gleich $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ für $x \in A$ und gleich $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ für $x \in B$. Damit ist f wirklich eine Funktion nach I, und es gilt $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass f stetig ist. Beachte dazu zunächst für alle $r \in \mathbb{Q}$:

(i) Ist $x \in U_r$ bzw. $x \in A_r$, so ist $x \in A_s$ für alle $s > r$, und damit $f(x) = \inf\{s \in \mathbb{Q} : x \in A_s\} \leq r$.

(ii) Ist $x \notin U_r$ bzw. $x \notin A_r$, so ist $x \notin A_s$ für alle $s < r$, und damit $f(x) = \inf\{s \in \mathbb{Q} : x \in A_s\} \geq r$.

Es seien nun $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie im Bild oben rechts wählen wir $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$$f(a) - \varepsilon < r_1 < f(a) < r_2 < f(a) + \varepsilon$$

und betrachten die offene Menge $U = U_{r_2} \backslash A_{r_1}$. Dann gilt:

- Wegen $f(a) < r_2$ ist $a \in U_{r_2}$ nach (ii), und wegen $f(a) > r_1$ ist $a \notin A_{r_1}$ nach (i). Also gilt $a \in U$.
- Für alle $x \in U_{r_2}$ ist $f(x) \leq r_2 < f(a) + \varepsilon$ nach (i), und für alle $x \notin A_{r_1}$ ist $f(x) \geq r_1 > f(a) - \varepsilon$ nach (ii). Also gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in U$.

Insgesamt ist U damit eine Umgebung von a, die unter f ganz in die ε-Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. Also ist f stetig.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Nach (b) gibt es eine stetige Funktion $f: X \to I$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Für die nach Satz 2.4 (b) offenen Mengen $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ gilt dann $U \supset A$, $V \supset B$ und $U \cap V = \emptyset$. Also ist X normal. □

Bemerkung 4.25.

(a) Natürlich gilt Satz 4.24 genauso auch für andere (abgeschlossene) Zielintervalle als $[0, 1]$.

(b) Das Lemma von Urysohn ist allein schon deswegen interessant, weil es auf geeigneten Räumen die Existenz (vieler) nicht-konstanter stetiger Funktionen nach $\mathbb{R}$ sicherstellt: Ist X z. B. ein normaler Hausdorff-Raum mit mehr als einem Punkt, so gibt es nach Lemma 4.5 (b) und Satz 4.24 zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ eine stetige Funktion $f: X \to I$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$. Ist X darüber hinaus zusammenhängend, bedeutet dies nach Aufgabe 3.10 sogar, dass f dann jeden Wert in I annehmen und X damit insbesondere überabzählbar sein muss.

(c) Satz 4.24 ist in gewissem Sinne „dual“ zur Situation beim Zusammenhang in Kapitel 3: Der Wegzusammenhang in Definition 3.1 (a) untersucht zu einem topologischen Raum X die Existenz von stetigen Abbildungen $f: I \to X$ mit vorgegebenen Bildern von $0, 1 \in I$, die Aussage aus Satz 4.24 (b) dagegen stetige Abbildungen $f: X \to I$ mit vorgegebenen Urbildern von 0 und 1. Beide Konzepte verwenden also einen speziellen Beispielraum (nämlich I mit der Standardtopologie) und erscheinen dadurch vielleicht nicht besonders natürlich, haben überraschenderweise aber eine enge Beziehung zu einer einfachen, allein durch offene und abgeschlossene Mengen formulierbaren Eigenschaft: die erstere zum Zusammenhang (siehe Definition 3.1 (b) und Satz 3.4), die letztere nach Satz 4.24 zur Normalität.

Eine interessante Konsequenz aus dem Lemma von Urysohn ist die folgende, noch etwas stärkere Aussage über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen.

Satz 4.26 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

(a) *X ist normal.*

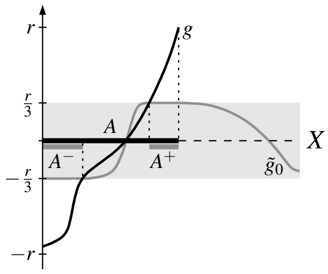
(b) *Jede stetige Funktion $f: A \to I$ von einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ in das Einheitsintervall I lässt sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}: X \to I$ fortsetzen (d. h. es gibt eine stetige Funktion $\tilde{f}: X \to I$ mit $\tilde{f}|_A = f$).*

Beweis. Auch bei diesem Satz kommt es natürlich nicht darauf an, welches abgeschlossene reelle Intervall wir als Zielbereich der Funktionen nehmen (siehe Bemerkung 4.25 (a)). Da es im folgenden Beweis etwas praktischer ist, verwenden wir daher als Zielintervall $[-1, 1]$ statt I.

„(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, wie man zu einer gegebenen stetigen Funktion $g: A \to [-r, r]$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ eine „Näherungsfortsetzung“ finden kann — darunter wollen wir eine stetige Funktion

$$\tilde{g}_0: X \to \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right] \qquad \text{mit} \qquad |g(x) - \tilde{g}_0(x)| \leq \frac{2r}{3} \quad \text{für alle } x \in A \tag{1}$$

verstehen. In der Tat ist eine solche Näherungsfortsetzung schnell konstruiert: Die Mengen $A^- := g^{-1}([-r,-\frac{r}{3}])$ und $A^+ := g^{-1}([\frac{r}{3},r])$ sind disjunkt und nach Satz 2.4 (d) abgeschlossen in A, mit Aufgabe 1.9 (c) also auch in X. Nach Satz 4.24 (mit Bemerkung 4.25 (a)) gibt es damit aufgrund der Normalität von X wie im Bild rechts ein stetiges $\tilde{g}_0\colon X \to [-\frac{r}{3},\frac{r}{3}]$ mit $\tilde{g}_0|_{A^-} = -\frac{r}{3}$ und $\tilde{g}_0|_{A^+} = \frac{r}{3}$, und diese erfüllt offensichtlich die oben genannten Bedingungen (1): Nach Konstruktion liegen für alle $x \in A$ sowohl $g(x)$ als auch $\tilde{g}_0(x)$ im gleichen der drei Intervalle $[-r,-\frac{r}{3}]$, $[-\frac{r}{3},\frac{r}{3}]$ und $[\frac{r}{3},r]$.



Auf diese Art konstruieren wir nun zur ursprünglich gegebenen Funktion $f\colon A \to [-1,1]$ eine Näherungsfortsetzung $\tilde{f}_0\colon X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, dann zum Fehler $f-\tilde{f}_0\colon A \to [-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ eine Näherungsfortsetzung $\tilde{f}_1\colon X \to [-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3},\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}]$ mit $f-\tilde{f}_0-\tilde{f}_1\colon A \to [-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3},\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}]$, und letztlich rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen

$$\tilde{f}_n\colon X \to \left[-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \tag{2}$$

$$\text{mit} \qquad |f(x)-\tilde{f}_0(x)-\cdots-\tilde{f}_n(x)| \le \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } x \in A. \tag{3}$$

Wegen (2) gilt für alle $x \in X$ nach der Formel für die geometrische Reihe [G2, Beispiel 7.3 (a)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{f}_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1. \tag{4}$$

Die Reihe über die Funktionen $\tilde{f}_n$ ist also absolut und gleichmäßig konvergent. Wir können somit $\tilde{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(x)$ für $x \in X$ setzen und erhalten eine reelle Funktion $\tilde{f}$ auf X, die ebenfalls wegen der Abschätzung (4) nur Werte im Intervall $[-1,1]$ annimmt. Genau wie im Fall von Folgen von Funktionen zwischen metrischen Räumen in den „Grundlagen der Mathematik“ zeigt man, dass $\tilde{f}$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist [G2, Satz 8.39 und Bemerkung 24.34 (b)]. Gehen wir schließlich in (3) zum Grenzwert $n \to \infty$ über, sehen wir, dass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt, also $\tilde{f}$ wie gewünscht eine stetige Fortsetzung von f ist.

„(b) ⇒ (a)“: Es seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist die Funktion

$$f\colon A \cup B \to [-1,1],\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x \in A \\ 1 & \text{für } x \in B \end{cases}$$

nach Satz 2.4 (b) stetig, da alle Urbilder von f die in $A \cup B$ offenen Mengen $\emptyset$, A, B oder $A \cup B$ sind. Also können wir f nach unserer Annahme zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}\colon X \to [-1,1]$ fortsetzen, und $U := \tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ und $V := \tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ sind wie gewünscht offene Mengen mit $U \supset A$, $V \supset B$ und $U \cap V = \emptyset$. □

05

Bei Bedarf lässt sich aus dem Fortsetzungssatz 4.26 schließlich auch noch die Annahme beseitigen, dass wir nur beschränkte Funktionen in ein vorgegebenes Intervall betrachten. Wir erhalten so die folgende alternative Form dieses Satzes:

Folgerung 4.27. *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn jede stetige Abbildung $f\colon A \to \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Es sei zunächst X normal. Ist $f\colon A \to \mathbb{R}$ dann eine stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Menge A, so können wir die stetige und beschränkte Funktion $g := \arctan f\colon A \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ betrachten und nach Satz 4.26 zu einer stetigen Funktion $\tilde{g}\colon X \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ fortsetzen.

Beachte jedoch, dass diese Fortsetzung außerhalb von A die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ annehmen könnte, so dass wir nicht einfach $\tan\tilde{g}$ als Fortsetzung von f wählen können. Wir können nach Satz 4.24 aber eine stetige Funktion $\tilde{h}\colon X \to [0,1]$ finden mit $\tilde{h}|_{\tilde{g}^{-1}(\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\})} = 0$ und $\tilde{h}|_A = 1$. Dann nimmt $\tilde{g}\cdot\tilde{h}$ nur Werte in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ an und stimmt auf A mit $\tilde{g}$ und damit auch mit g überein, so dass nun wie gewünscht $\tilde{f} := \tan(\tilde{g} \cdot \tilde{h})$ eine stetige Fortsetzung von f ist.

Die Rückrichtung zeigt man genauso wie in Satz 4.26. □

Aufgabe 4.28. Es sei $A \subset [0,1)$ die Menge aller Zahlen, die eine Dezimaldarstellung aus nur den Ziffern 0 und 1 besitzen. Im Folgenden schreiben wir eine solche Zifferndarstellung zur Basis 10 als $(0,a_1a_2a_3\dots)_{10}$ mit $a_1,a_2,a_3\dots \in \{0,1\}$.

(a) Man zeige: Die Abbildung $f\colon A \to I$, $(0,a_1a_2a_3\dots)_{10} \mapsto (0,a_1a_2a_3\dots)_2$, die eine Zahlendarstellung zur Basis 10 als eine zur Basis 2 uminterpretiert, ist stetig.

(b) Zeige, dass es eine stetige Abbildung $g\colon I \to I$ gibt mit $g(A) = I$.

(c) Benutze die Idee aus (a) und (b), um einen alternativen Beweis für die Existenz von Peano-Kurven, also von stetigen, surjektiven Abbildungen von I nach I^2 anzugeben (siehe Satz 2.19).

(Wer bereits die „Maß- und Integrationstheorie“ gehört hat, kann (b) auch als Beispiel dafür auffassen, dass auch schon im eindimensionalen Lebesgue-Maß eine stetige Funktion eine beschränkte Nullmenge auf eine (messbare) Menge mit positivem Maß abbilden kann.)