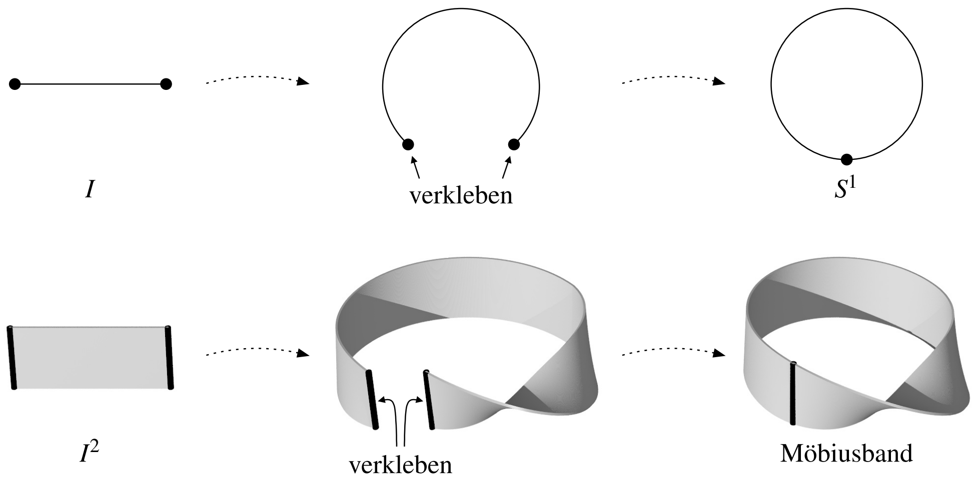
5. Quotientenräume

Bevor wir unsere Untersuchung topologischer Räume fortsetzen, wollen wir in diesem Kapitel zunächst einmal viele neue Beispiele solcher Räume kennen lernen, indem wir Konstruktionen angeben, mit denen man aus bekannten topologischen Räumen neue gewinnen kann. Im Gegensatz zu unseren bisher betrachteten Beispielen geht es dabei weniger um Räume mit ungewöhnlich konstruierten Topologien, sondern hauptsächlich um solche, die sich durch „Verkleben" aus einfachen Grundbausteinen zusammensetzen lassen. Anschaulich erhält man z. B. wie im Bild unten eine Kreislinie, wenn man die Eckpunkte des Einheitsintervalls miteinander verklebt, und ein sogenanntes Möbiusband (siehe Beispiel 5.9 (b)), wenn man im Einheitsquadrat I^2 die linke mit der rechten Kante mit entgegengesetzter Orientierung verklebt.



Wie kann man ein solches Verkleben nun mathematisch exakt beschreiben? Ihr wisst aus den Anfängervorlesungen bereits, wie dies zunächst erst einmal mengentheoretisch möglich ist: Elemente einer Menge miteinander zu identifizieren bedeutet einfach, eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge zu betrachten und dann zur Menge der Äquivalenzklassen überzugehen. Für die Kreislinie oben müssten wir also z. B. die Äquivalenzrelation $\sim$ auf dem Einheitsintervall I betrachten, für die $0 \sim 1$ gilt, ansonsten aber jeder Punkt in seiner eigenen Äquivalenzklasse liegt. Die Menge $I/\sim$ der Äquivalenzklassen beschreibt dann den zusammengeklebten Raum, in dem 0 und 1 miteinander identifiziert wurden. Die natürliche Restklassenabbildung $I \to I/\sim$ bildet dabei jeden Punkt des ursprünglichen Intervalls auf den entsprechenden Punkt auf der Kreislinie nach dem Zusammenkleben ab. In der Tat ist diese topologische Sichtweise wahrscheinlich eine der anschaulichsten Arten, wie man sich Äquivalenzrelationen bzw. Äquivalenzklassen vorstellen kann.

Bevor wir mit der Untersuchung derartiger Räume beginnen, wollen wir zuerst noch eine Konstruktion angeben, mit der wir Äquivalenzrelationen später deutlich einfacher hinschreiben können. Betrachten wir z. B. noch einmal das Verkleben der beiden Randpunkte des Einheitsintervalls oben, so haben wir dafür eine Äquivalenzrelation auf I mit $0 \sim 1$ benötigt. Dies alleine — also die Relation $\sim$ auf I, für die genau $0 \sim 1$ und sonst immer $x \not\sim y$ gilt — ist aber natürlich noch keine Äquivalenzrelation, da sie weder reflexiv noch symmetrisch ist. Dies lässt sich jedoch mit der folgenden Konstruktion einfach reparieren:

Konstruktion 5.1 (Erzeugte Äquivalenzrelationen)**.** Es sei $\sim$ eine beliebige Relation auf einer Menge X. Wir definieren auf X eine neue Relation $\approx$, indem wir für alle x, y setzen

$$x \approx y \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_0, \dots, x_n \in X, \text{ so dass } x_0 = x \text{ und } x_n = y \text{ ist} \\ \text{und für alle } i = 1, \dots, n \text{ gilt, dass } x_{i-1} \sim x_i \text{ oder } x_i \sim x_{i-1}.\end{array}$$

Man prüft leicht nach, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist. In der Tat ist es die kleinste Äquivalenzrelation, bei der für alle $x, y \in X$ mit $x \sim y$ auch $x \approx y$ gilt — d. h. die Relation, die man erhält, indem man zu $\sim$ nur die Relationen mit hinzunimmt, die man unbedingt benötigt, um die Ausgangsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv zu machen. Ist also $\sim$ bereits eine Äquivalenzrelation, so stimmt $\approx$ mit $\sim$ überein.

Man nennt $\approx$ die von $\sim$ **erzeugte Äquivalenzrelation**. In dieser Situation werden wir die Menge $X/\approx$ ihrer Äquivalenzklassen im Folgenden auch mit $X/\sim$ bezeichnen, und die zugehörige Restklassenabbildung mit $\pi \colon X \to X/\sim$.

Beispiel 5.2. Wie im oben erwähnten Beispiel sei $\sim$ die Relation auf dem Einheitsintervall I, für die nur $0 \sim 1$, also $x \not\sim y$ für alle $(x, y) \neq (0, 1)$ gilt. Dann ist die davon erzeugte Äquivalenzrelation $\approx$ gegeben durch

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{oder} \quad (x, y) = (1, 0) \quad \text{oder} \quad (x, y) = (0, 1).$$

Beachte, dass wir damit bereits eine wohldefinierte und bijektive Abbildung

$$f \colon I/\sim \; \to S^1 \subset \mathbb{C}, \; \overline{x} \mapsto e^{2\pi i x}$$

haben, die das Verkleben des Einheitsintervalls an den Randpunkten beschreibt und wie gewünscht die Kreislinie ergibt. Natürlich möchten wir diese Abbildung nun aber auch noch als Homöomorphismus ansehen können und müssen daher zuerst einmal sagen, welche Topologie wir dem Raum $I/\sim$ geben wollen. Es stellt sich heraus, dass es für die Topologie auf einer solchen Menge von Äquivalenzklassen eine sehr natürliche Wahl gibt: die sogenannte Quotiententopologie, die wir jetzt einführen wollen.

Lemma und Definition 5.3 (Quotiententopologie)**.** *Es seien $\sim$ eine (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum X sowie $\pi \colon X \to X/\sim$ die zugehörige Restklassenabbildung. Dann ist*

$$\mathscr{T} := \{U \subset X/\sim \; : \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

*eine Topologie auf $X/\sim$. Sie wird **Quotiententopologie** genannt und ist die Standardtopologie auf derartigen Mengen von Äquivalenzklassen. Man bezeichnet $X/\sim$ mit dieser Topologie auch als einen **Quotientenraum**.*

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften einer Topologie aus Definition 1.1 nachprüfen.

(a) Da $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ offen in X sind, sind $\emptyset$ und $X/\sim$ nach Definition in $\mathscr{T}$.

(b) Für alle i in einer Indexmenge I seien $U_i \in \mathscr{T}$, also $\pi^{-1}(U_i)$ offen in X. Dann ist

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

als Vereinigung offener Mengen offen in X, und damit liegt $\bigcup_{i \in I} U_i$ nach Definition in $\mathscr{T}$.

(c) Dies folgt analog zu (b) aus der Gleichung

$$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V). \qquad \square$$

Bemerkung 5.4 (Offene und abgeschlossene Mengen in der Quotiententopologie)**.** Definition 5.3 besagt mit den obigen Notationen also, dass eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ genau dann offen ist, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ in X offen ist. Ein analoges Kriterium gilt dann automatisch auch für abgeschlossene Mengen: Eine Teilmenge $A \subset X/\sim$ ist ja genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $(X/\sim)\backslash A$ offen ist, was nach Definition nun genau dann gilt, wenn $\pi^{-1}((X/\sim)\backslash A) = X \backslash \pi^{-1}(A)$ offen, also $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Die Definition der Quotiententopologie ist außerdem so gemacht, dass es sehr einfach ist, stetige Funktionen von Quotientenräumen in andere topologische Räume zu beschreiben:

Lemma 5.5 (Stetige Abbildungen von Quotienten)**.** *Es sei $\pi\colon X \to X/\!\sim$ die Restklassenabbildung für eine (Äquivalenz-)Relation $\sim$ auf einem topologischen Raum X. Dann gilt:*

(a) *π ist stetig.*

(b) *Eine Abbildung $f\colon X/\!\sim \to Y$ in einen weiteren topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn die Verkettung $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.*

Beweis.

(a) Ist $U \subset X/\!\sim$ offen, so bedeutet dies nach Definition der Quotiententopologie gerade, dass $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist. Damit ist π stetig nach Satz 2.4 (b).

(b) Nach Satz 2.4 (b) ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in $X/\!\sim$ ist. Nach Definition 5.3 ist dies aber äquivalent dazu, dass $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ offen in X ist für alle diese U, und damit wiederum nach Satz 2.4 (b) zur Stetigkeit von $f \circ \pi$. □

Bemerkung 5.6 (Konstruktion stetiger Abbildungen von Quotienten)**.** Lemma 5.5 (b) kann man auch als Konstruktionsmöglichkeit für Abbildungen interpretieren, deren Startraum ein Quotientenraum ist: Wollen wir eine stetige Abbildung f von einem Quotienten $X/\!\sim$ in einen anderen Raum Y angeben, so kann man dafür einfach eine stetige Abbildung $g\colon X \to Y$ hinschreiben, die auf den Äquivalenzklassen konstant ist. Eine solche Abbildung liefert dann nämlich eine wohldefinierte Funktion $f\colon X/\!\sim \to Y$, $\bar{x} \mapsto g(x)$, die natürlich $g = f \circ \pi$ erfüllt und daher nach Lemma 5.5 (b) stetig ist.

Bemerkung 5.7 (Finaltopologien)**.** Analog zu Bemerkung 2.12 kann man auch hier leicht nachprüfen, dass die Quotiententopologie die feinste Topologie auf $X/\!\sim$ ist, für die die Restklassenabbildung π stetig ist, und dass sie durch die Eigenschaft aus Lemma 5.5 (b) eindeutig charakterisiert ist. Man nennt diese Eigenschaft daher die *universelle Eigenschaft der Quotiententopologie*.

Auch dies ist ein Spezialfall einer viel allgemeineren Konstruktion: Hat man eine Familie topologischer Räume $\{X_i\}$, eine Menge Y und Abbildungen $\pi_i\colon X_i \to Y$, so definieren diese Daten auf Y die sogenannte *Finaltopologie* auf Y als die feinste Topologie, für die alle π_i stetig sind, oder (äquivalent dazu) als die eindeutige Topologie, für die eine Abbildung $f\colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn alle Verkettungen $f \circ \pi_i\colon X_i \to Z$ stetig sind. Unser Fall der Quotiententopologie ergibt sich hieraus also, wenn man nur einen Raum $X = X_i$ hat, $Y = X/\!\sim$ und $\pi = \pi_i$ die Restklassenabbildung ist.

Die Konstruktion der Finaltopologien ist damit also exakt dual zu der der Initialtopologien in Bemerkung 2.12.

Eine weitere unmittelbare Folgerung aus Lemma 5.5 ist, dass sich einige unserer bisher eingeführten Eigenschaften topologischer Räume von einem ursprünglichen Raum X auf einen zugehörigen Quotientenraum übertragen.

Folgerung 5.8. *Es seien $\sim$ eine (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum X und $X/\!\sim$ der zugehörige Quotientenraum.*

(a) *Ist X wegzusammenhängend, so auch $X/\!\sim$.*

(b) *Ist X zusammenhängend, so auch $X/\!\sim$.*

(c) *Ist X kompakt, so auch $X/\!\sim$.*

Beweis. Da sich alle drei angegebenen Eigenschaften auf Bilder unter stetigen Abbildungen übertragen (siehe Lemma 3.6 und Satz 4.10 (a)), ergeben sich die Behauptungen sofort aus der Stetigkeit der surjektiven Restklassenabbildung $\pi\colon X \to X/\!\sim$ gemäß Lemma 5.5 (a). □

Die Trennungseigenschaften, also die Hausdorff-Eigenschaft und die Normalität, übertragen sich jedoch nicht ohne weiteres auf Quotientenräume. Wir werden dies später noch untersuchen (siehe Satz 5.18).

Beispiel 5.9. Mit unseren Vorarbeiten können wir nun sehr einfach einige interessante Beispiele von Quotientenräumen konstruieren.

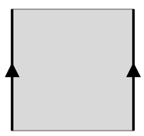
(a) Wir betrachten noch einmal wie in Beispiel 5.2 die durch $0 \sim 1$ auf dem Einheitsintervall I gegebene Relation. Die dort schon als bijektiv erkannte Abbildung

$$f\colon I/\sim \;\to S^1 \subset \mathbb{C},\ \overline{x} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$$

des Quotientenraums auf die Kreislinie ist nach Lemma 5.5 (b) stetig, da die zugehörige Abbildung $I \to S^1$, $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ stetig ist. Damit ist sie nach Folgerung 4.14 aber auch ein Homöomorphismus, da $I/\sim$ nach Folgerung 5.8 (c) kompakt und S^1 als metrischer Raum natürlich ein Hausdorff-Raum ist (siehe Beispiel 4.3 (a)). Durch das Verkleben der Randpunkte von I erhalten wir also tatsächlich wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angegeben die Kreislinie S^1.

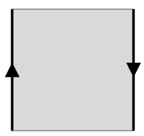
Beachte, dass dies aufgrund der Rotationssymmetrie von S^1 insbesondere bedeutet, dass der Verklebepunkt hinterher „topologisch genauso aussieht“ wie alle anderen Punkte auf der Kreislinie — das Verkleben erzeugt also in der Tat genau die topologische Struktur, die man sich wünschen würde.

(b) Als zweidimensionales Beispiel betrachten wir nun das Einheitsquadrat I^2 und verkleben darin die linke mit der rechten Kante. Wir können dies mit gleicher oder entgegengesetzter Orientierung dieser Kanten tun, also die im folgenden Bild angegebenen Relationen auf I^2 verwenden.



$(0,t) \sim (1,t)$ für alle $t \in I$

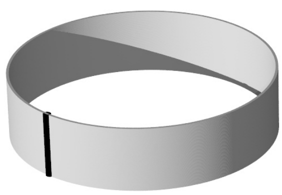
(A)



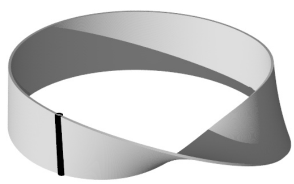
$(0,t) \sim (1,1-t)$ für alle $t \in I$

(B)

Die dementsprechend zusammengeklebten Räume $I^2/\sim$ zeigt das Bild unten, wobei die dunkel eingezeichnete Linie die Klebekante ist. Im Fall (A) erhält man einen Zylindermantel $S^1 \times I$ (mit einer analogen Begründung wie in (a)). Den im Fall (B) konstruierten Raum haben wir schon am Anfang dieses Kapitels betrachtet: Man nennt ihn das **Möbiusband**. Es unterscheidet sich vom „unverdrehten Band“ (A) anschaulich dadurch, dass diese Fläche nicht orientierbar ist: Während das Band in (A) eine Außen- und eine Innenseite hat, wird die Außenseite beim Möbiusband (B) zur Innenseite, wenn man einmal um das Band herum läuft. Dieser sehr anschauliche Begriff der Orientierbarkeit einer Fläche ist mathematisch jedoch nur schwer zu fassen, wir werden ihn daher in dieser Vorlesung nicht exakt einführen oder untersuchen.



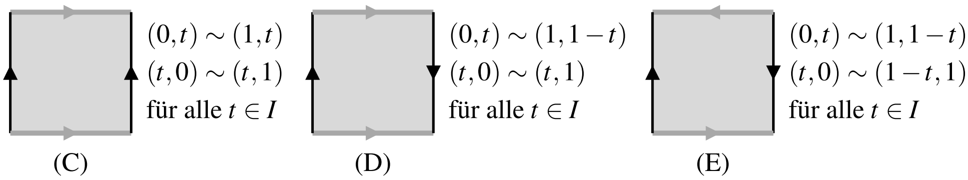
(A)



(B)

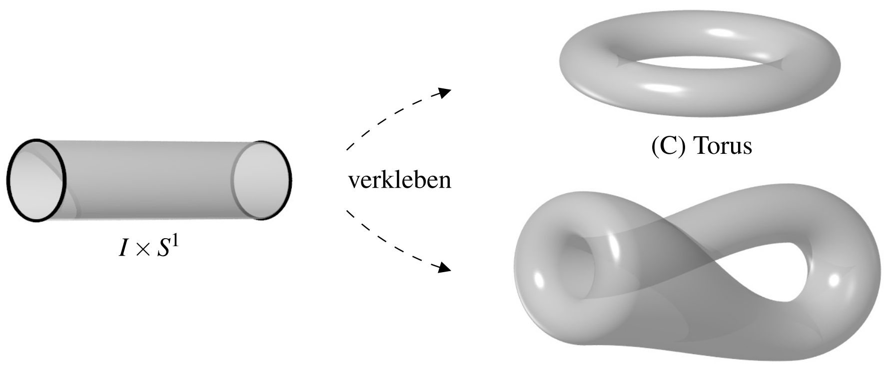
Beachte, dass das Möbiusband auf diese Art als Quotientenraum *definiert* ist, und dass diese Definition in der Tat sehr einfach ist — es wäre viel umständlicher gewesen, einen derartigen Raum als Teilraum von $\mathbb{R}^3$ durch Gleichungen oder eine Parametrisierung anzugeben.

(c) Verkleben wir in (b) zusätzlich auch noch die untere mit der oberen Kante in I^2, so haben wir hierfür drei Möglichkeiten: Wir können wie in (C) unten beide Kantenpaare mit gleicher Orientierung verkleben, wie in (D) eines mit gleicher und eines mit entgegengesetzter Orientierung, oder wie in (E) beide mit entgegengesetzter Orientierung.

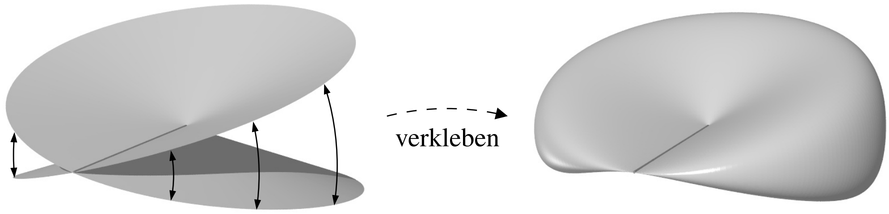


In den Fällen (C) und (D) können wir zunächst einmal die obere mit der unteren Kante verkleben und erhalten wie in (b) einen Zylindermantel $I \times S^1$ (siehe Bild unten links). Identifizieren wir dort nun in (C) noch den linken mit dem rechten Kreisrand mit der gleichen Orientierung, so erhalten wir einen **Torus**. Mit der gleichen Begründung wie in (a) sieht man, dass dieser Raum homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist.

Bei (D) dagegen müssen wir die beiden Kreisränder des Zylindermantels in entgegengesetzter Orientierung identifizieren. Formal als Quotientenraum ist dies natürlich überhaupt kein Problem; als Teilraum von $\mathbb{R}^3$ kann man die resultierende Fläche jedoch nicht mehr korrekt darstellen — dies ist nur mit „Selbstdurchdringungen“ wie im Bild unten rechts möglich. Man bezeichnet diese Fläche als **Kleinsche Flasche**. Sie lässt sich in den $\mathbb{R}^n$ nur für $n \geq 4$ einbetten und ist wie das Möbiusband ein weiteres Beispiel für einen topologischen Raum, der sich als Quotientenraum viel einfacher definieren lässt als durch Gleichungen oder eine Parametrisierung in $\mathbb{R}^n$.



Der Quotientenraum in (E) lässt sich am besten geometrisch verstehen, wenn man bedenkt, dass hier jeder Randpunkt von I^2 mit seinem gegenüberliegenden Punkt verklebt wird, und dass das Einheitsquadrat I^2 nach Beispiel 2.16 (b) homöomorph zum Einheitskreis $D^2 \subset \mathbb{C}$ ist. Wir betrachten also letztlich den Raum $D^2/\sim$ mit der Relation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1 \subset D^2$. Um diesen Raum zeichnen zu können, stellen wir die Kreisscheibe D^2 zunächst wie im Bild unten links so dar, dass wir jeden Punkt mit Polarkoordinaten r und φ an der Stelle mit Polarkoordinaten r und 2φ malen, so dass wir also jeden Punkt des Kreises (mit Ausnahme des Nullpunkts) zweimal erhalten.



(E) reelle projektive Ebene

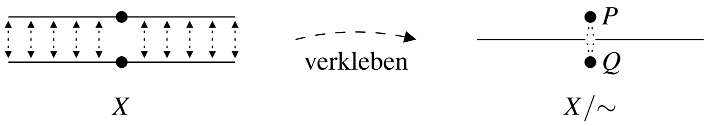
Damit wir dabei diese beiden Kopien der Punkte unterscheiden können, haben wir sie übereinander gezeichnet und eine Fläche erhalten, die wie eine zweifache Überdeckung der Kreisscheibe aussieht — was in $\mathbb{R}^3$ wieder nur mit einer Selbstdurchdringung geht (die im Bild durch die graue Linie dargestellt ist).

Gegenüberliegende Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe D^2 liegen in dieser Darstellung nun direkt übereinander. Wir müssen jetzt also nur noch jeden Punkt des oberen Randes mit dem entsprechenden Punkt des unteren Randes verkleben und erhalten so die im Bild oben rechts gezeichnete Fläche, die immer noch eine Selbstdurchdringung hat. Man bezeichnet sie als die **reelle projektive Ebene**. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion sogenannter projektiver Räume, die wir in Konstruktion 5.23 bzw. Aufgabe 5.24 noch kennenlernen werden.

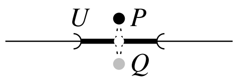
(d) Als letzte Konstruktion eines Quotientenraumes wollen wir nun noch ein ganz anderes Beispiel betrachten. Dazu starten wir mit der Menge $X = I \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$, also zwei disjunkten Einheitsintervallen, und betrachten darauf die Relation

$$(t,0) \sim (t,1) \quad \text{für alle } t \in I \backslash \{\tfrac{1}{2}\},$$

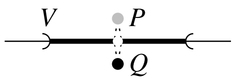
d. h. wir verkleben die beiden Intervalle in allen sich entsprechenden Punkten, mit Ausnahme des mittleren Punktes $\frac{1}{2} \in I$. Wir erhalten auf diese Art für $X/{\sim}$ also wie im Bild unten ein „Intervall mit zwei Mittelpunkten P und Q“.



Dieser Raum verhält sich ganz anders als die Beispiele in (a) bis (c): Er ist weder normal noch ein Hausdorff-Raum, da die Punkte P und Q zwar abgeschlossen sind, aber sich nicht durch offene Mengen trennen lassen. Ist nämlich U eine offene Umgebung von P in $X/{\sim}$, so ist $\pi^{-1}(U)$ nach Definition 5.3 eine offene Umgebung von $(\frac{1}{2},0)$ in X und enthält damit eine offene Kugel $U_\varepsilon(\frac{1}{2},0)$ um diesen Punkt. Damit enthält U alle Punkte der Form $\overline{(t,0)} = \overline{(t,1)}$ für $0 < |t - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Dasselbe gilt aber auch für offene Umgebungen von Q, und zwei solche Mengen können offensichtlich nicht disjunkt sein. Das folgende Bild verdeutlicht dies und zeigt eine offene Umgebung U von P und V von Q in $X/{\sim}$, wobei der graue Punkt jeweils nicht in der Umgebung enthalten ist.



Eine Umgebung U von P



Eine Umgebung V von Q

Insbesondere bedeutet dies nach Beispiel 4.3 (a), dass dieser Quotientenraum kein metrischer Raum und damit auch für kein n homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^n$ sein kann. In diesem Sinne sind die Bilder dieses Raumes in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ oben also nicht ganz korrekt (sie könnten z. B. suggerieren, dass $X/{\sim}$ unzusammenhängend ist, was aber nicht der Fall ist).

Aufgabe 5.10. Nehmt einen Zylindermantel $X = S^1 \times I \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und verklebt an einem der beiden Ränder jeden Punkt mit seinem gegenüberliegenden, d. h. betrachtet den Raum $X/\sim$ für die Relation $(z,1) \sim (-z,1)$ für alle $z \in S^1$.

Zeigt sowohl durch einen mathematischen Beweis als auch durch Basteln, dass dieser Raum homöomorph zum Möbiusband ist.

06

Bisher haben wir Quotientenräume immer direkt durch die Angabe einer (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum definiert. In der Praxis treten jedoch oft zwei spezielle Arten auf, wie man die nötige Äquivalenzrelation aus anderen „Verklebedaten“ bekommt: durch Angabe einer Verklebeabbildung bzw. durch Herausteilen einer Gruppenoperation. Diese beiden Konstruktionen wollen wir nun im Rest dieses Kapitels noch untersuchen.

Bei der Angabe einer Verklebeabbildung startet man mit zwei topologischen Räumen X und Y sowie einer stetigen Abbildung $f\colon A \to Y$, die auf einer Teilmenge A von X definiert ist. Man möchte als topologischen Raum nun X und Y zusammen nehmen und dadurch verkleben, dass man jeden Punkt $x \in A$ mit seinem Bildpunkt $f(x) \in Y$ identifiziert. Um dies formal exakt hinschreiben zu können, benötigen wir zunächst eine Konstruktion, die das disjunkte Vereinigen der beiden Räume X und Y zu einem neuen Raum beschreibt.

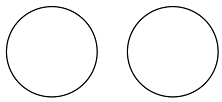
Konstruktion 5.11 (Disjunkte Vereinigungen)**.** Es seien X und Y zwei topologische Räume. Wir definieren die **disjunkte Vereinigung** von X und Y als

$$X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \quad \subset (X \cup Y) \times \{0,1\}$$

mit der Topologie

$$\mathscr{T} = \{U \sqcup V : U \subset X \text{ offen und } V \subset Y \text{ offen}\}.$$

Letztlich ist diese umständlich wirkende Definition nur ein Trick, um dafür zu sorgen, dass X und Y in dem Raum $X \sqcup Y$ wirklich disjunkt sind, auch wenn sie es als Mengen zunächst einmal vorher nicht waren: Wir fügen einfach eine zweite Koordinate hinzu, die für den ersten Raum 0 und für den zweiten Raum 1 ist, so dass alle Punkte von $X \sqcup Y$ eindeutig zu einem der beiden Teilräume gehören. So ist z. B. $S^1 \sqcup S^1$ wie im Bild rechts die Vereinigung zweier Kreislinien.



$S^1 \sqcup S^1$

Oft werden wir bei der Notation von Punkten in $X \sqcup Y$ die zweite Koordinate weglassen, wenn klar ist, ob der Punkt in der ersten oder zweiten Komponente liegen soll.

Aus der Definition der Topologie auf $X \sqcup Y$ folgen unmittelbar einige elementare Eigenschaften:

(a) Eine Menge $A \sqcup B \subset X \sqcup Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen sind.

(b) $X \sqcup Y$ ist (für nicht-leere X und Y) immer unzusammenhängend, da $X \sqcup \emptyset$ und $\emptyset \sqcup Y$ offen sind und sich disjunkt zu $X \sqcup Y$ vereinigen.

(c) Eine Abbildung $f\colon X \sqcup Y \to Z$ in einen dritten topologischen Raum Z hat stets die Form

$$f\colon X \sqcup Y \to Z,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} f_X(x) & \text{falls } t = 0 \\ f_Y(x) & \text{falls } t = 1 \end{cases}$$

für zwei Abbildungen $f_X\colon X \to Z$ und $f_Y\colon Y \to Z$, und ist genau dann stetig, wenn f_X und f_Y es sind. In der Tat ist $\mathscr{T}$ wie in Bemerkung 5.7 genau die Finaltopologie auf $X \sqcup Y$ für die beiden natürlichen Einbettungsabbildungen $X \to X \sqcup Y$ und $Y \to X \sqcup Y$.

Definition 5.12 (Verkleben entlang von Abbildungen)**.** Es seien X und Y topologische Räume sowie $f\colon A \to Y$ eine stetige Abbildung von einer Teilmenge $A \subset X$ nach Y.

(a) Wir betrachten auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ die Relation $\sim$ mit $(x,0) \sim (f(x),1)$ für alle $x \in A$ und setzen

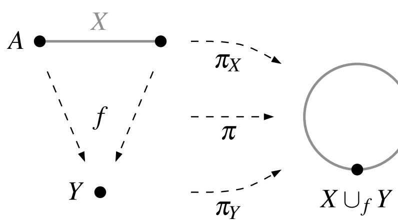
$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/\sim,$$

verkleben also jeden Punkt x in $A \subset X$ mit seinem Bild $f(x)$ in Y. Wie üblich werden wir die zugehörige Restklassenabbildung mit $\pi\colon X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ bezeichnen, ihre Verkettung mit den natürlichen Einbettungen $X \to X \sqcup Y$ und $Y \to X \sqcup Y$ mit

$$\pi_X : X \to X \sqcup Y \to X \cup_f Y \quad \text{bzw.} \quad \pi_Y : Y \to X \sqcup Y \to X \cup_f Y.$$

(b) Ist Y der einpunktige Raum und dementsprechend f die konstante Abbildung (so dass also alle Punkte in A miteinander identifiziert werden), so schreiben wir den Raum $X \cup_f Y$ auch als X/A und sagen, dass er aus X durch **Zusammenschlagen** von A auf einen Punkt entsteht.

Beispiel 5.13. Für den Raum $I/\{0,1\}$, der aus dem Einheitsintervall durch Zusammenschlagen der beiden Randpunkte auf einen Punkt entsteht, benötigen wir mit den obigen Notationen wie im Bild rechts $X = I$, $A = \{0,1\}$, den einpunktigen Raum Y und die konstante Abbildung $f\colon A \to Y$. Da wir genau die drei Punkte $0,1 \in A$ und Y miteinander identifizieren, ist der entstehende Raum $X \cup_f Y$ offensichtlich wie in Beispiel 5.2 bijektiv zur Kreislinie S^1. Wir werden in Beispiel 5.16 (a) sehen, dass $I/\{0,1\}$ auch tatsächlich homöomorph zu S^1 ist.



Bemerkung 5.14. Beachte, dass die Konstruktion von $X \cup_f Y$ in Definition 5.12 (a) nicht symmetrisch in X und Y ist. In der Tat kann die dort betrachtete Relation zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ miteinander identifizieren (nämlich wenn $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = f(x_2)$ gilt), aber nie zwei Punkte in Y. Man sollte sich X daher wie in Beispiel 5.13 als den Startraum vorstellen, in dem man etwas verkleben möchte, A als die „Klebestelle“ in diesem Raum, und Y als das Bild von A nach dem Verkleben.

Bemerkung 5.15 (Offene Mengen in $X \cup_f Y$)**.** Nach Definition 5.3 der Quotiententopologie ist eine Menge $U \subset X \cup_f Y$ genau dann offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ in $X \sqcup Y$ offen ist, also wenn $\pi_X^{-1}(U) \subset X$ und $\pi_Y^{-1}(U) \subset Y$ offen sind (siehe Konstruktion 5.11).

Dieses Kriterium lässt sich manchmal noch etwas vereinfachen. Ist f nämlich surjektiv, so gilt zunächst $\pi_Y^{-1}(U) = f(A \cap \pi_X^{-1}(U))$:

„$\subset$“: Ist $y \in \pi_Y^{-1}(U)$, also $\overline{y} \in U$, so gibt es wegen der Surjektivität von f ein $x \in A$ mit $y = f(x)$. Nach Konstruktion der Relation in Definition 5.12 (a) ist dann $\overline{x} = \overline{f(x)} = \overline{y} \in U$, und damit $x \in \pi_X^{-1}(U)$. Also ist $y = f(x)$ mit $x \in A \cap \pi_X^{-1}(U)$, d. h. $y \in f(A \cap \pi_X^{-1}(U))$.

„$\supset$“: Ist $y \in f(A \cap \pi_X^{-1}(U))$, so ist $y = f(x)$ mit $x \in A$ und $\overline{x} \in U$, also $\overline{y} = \overline{f(x)} = \overline{x} \in U$ und damit $y \in \pi_Y^{-1}(U)$.

Ist dann also $\pi_X^{-1}(U)$ offen in X und damit $A \cap \pi_X^{-1}(U)$ offen in A, so können wir daraus bereits auf die Offenheit von $\pi_Y^{-1}(U)$ in Y schließen, wenn wir wissen, dass $f\colon A \to Y$ offene Mengen auf offene Mengen abbildet — derartige Abbildungen heißen *offen*. In der Praxis haben Verklebeabbildungen oft diese Eigenschaft, z. B. wenn Y diskret oder f ein lokaler Homöomorphismus ist, also eine Umgebung von jedem Punkt homöomorph auf eine Umgebung des Bildpunktes abbildet.

Zusammenfassend sehen wir also, dass eine Teilmenge $U \subset X \cup_f Y$ im Fall einer surjektiven und offenen Verklebeabbildung f genau dann offen ist, wenn $\pi_X^{-1}(U)$ offen in X ist.

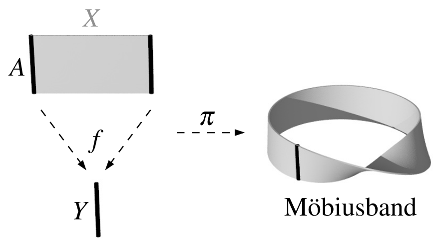
Beispiel 5.16.

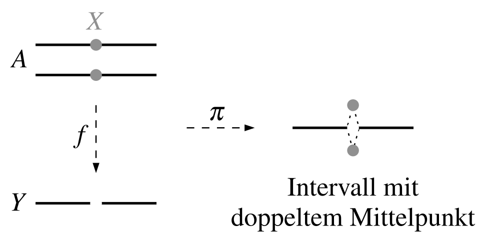
(a) Der Raum $I/\{0,1\}$ aus Beispiel 5.13 ist homöomorph zu S^1: Die Verklebeabbildung ist hier trivialerweise surjektiv und offen, und damit ist eine Teilmenge $U \subset I/\{0,1\}$ nach Bemerkung 5.15 genau dann offen, wenn ihr Urbild in I es ist — was exakt die gleiche Topologie ist wie in Beispiel 5.9 (a).

(b) Auch die anderen Räume aus Beispiel 5.9 können wir mit Hilfe einer Verklebeabbildung erhalten, z. B. wie im Bild unten das Möbiusband für $X = I^2$, $A = \{0,1\} \times I$, $Y = I$ und die Verklebeabbildung

$$f\colon A \to Y,\ (t,x) \mapsto \begin{cases} x & \text{für } t = 0 \\ 1-x & \text{für } t = 1, \end{cases}$$

und das Intervall mit zwei Mittelpunkten aus $X = I \sqcup I$, $A = (I \backslash \{\frac{1}{2}\}) \sqcup (I \backslash \{\frac{1}{2}\})$, $Y = I \backslash \{\frac{1}{2}\}$ und $f\colon A \to Y$, $(x,t) \mapsto x$. Beachte, dass die Topologien dieser Räume wie in (a) nach Bemerkung 5.15 mit den in Beispiel 5.9 konstruierten übereinstimmen, da die Verklebeabbildungen in diesen Fällen (als lokale Homöomorphismen) offen und natürlich auch surjektiv sind.





Aufgabe 5.17. Welcher Raum entsteht aus einem Möbiusband, wenn man ...

(a) es mit einer Kreisscheibe D^2 entlang des gemeinsamen Randes (jeweils homöomorph zu S^1) verklebt;

(b) es mit einem zweiten Möbiusband entlang des gemeinsamen Randes S^1 verklebt;

(c) es entlang der Mittellinie aufschneidet;

(d) seinen Rand S^1 zu einem Punkt zusammenschlägt?

Ein Vorteil des Verklebens entlang von Abbildungen ist, dass wir in dieser Sprechweise auf relativ einfache Art ein Kriterium dafür beweisen können, wann so konstruierte Räume die von uns in Kapitel 4 betrachteten Trennungseigenschaften besitzen.

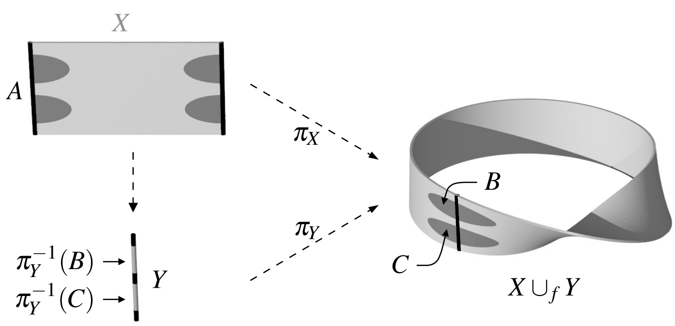
Satz 5.18. *Es seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, und $f\colon A \to Y$ eine stetige Abbildung.*

(a) *Sind X und Y normal, so auch $X \cup_f Y$.*

(b) *Sind X und Y zusätzlich Hausdorff-Räume, so auch $X \cup_f Y$.*

Beweis.

(a) Wir verwenden das Kriterium von Urysohn aus Satz 4.24. Es seien also $B, C \subset X \cup_f Y$ wie im Bild unten zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann sind $\pi_Y^{-1}(B)$ und $\pi_Y^{-1}(C)$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y, und damit gibt es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $h\colon Y \to I$ mit $h|_{\pi_Y^{-1}(B)} = 0$ und $h|_{\pi_Y^{-1}(C)} = 1$.



Als Nächstes betrachten wir auf der (im Bild oben links dunkel dargestellten) abgeschlossenen Teilmenge $A \cup \pi_X^{-1}(B) \cup \pi_X^{-1}(C)$ von X die Funktion

$$A \cup \pi_X^{-1}(B) \cup \pi_X^{-1}(C) \to I, \ x \mapsto \begin{cases} h(f(x)) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in \pi_X^{-1}(B) \\ 1 & \text{falls } x \in \pi_X^{-1}(C). \end{cases}$$

Sie ist nach Konstruktion von h wohldefiniert, d. h. für Punkte in $A \cap \pi_X^{-1}(B)$ bzw. $A \cap \pi_X^{-1}(C)$ ergeben beide anwendbaren Definitionszeilen den gleichen Wert. Da sie weiterhin nach Aufgabe 2.9 (b) stetig ist, können wir sie nach dem Satz 4.26 von Tietze zu einer stetigen Funktion $g \colon X \to I$ fortsetzen.

Dann ist aber die Funktion

$$X \cup_f Y \to I, \quad \begin{cases} \overline{x} \mapsto g(x) & \text{für } x \in X \\ \overline{y} \mapsto h(y) & \text{für } y \in Y \end{cases}$$

wohldefiniert und nach Konstruktion 5.11 (c) stetig, und außerdem auf B und C konstant 0 bzw. 1. Nach Satz 4.24 ist $X \cup_f Y$ also normal.

(b) Da wir in $X \cup_f Y$ nach (a) bereits abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen können, genügt es zu zeigen, dass Punkte abgeschlossen sind. Nach Definition der Quotiententopologie müssen wir also zeigen, dass Urbilder von Punkten in $X \cup_f Y$ unter π abgeschlossen in $X \sqcup Y$ sind.

Für Punkte der Form $\overline{x}$ mit $x \in X \backslash A$ ist dies offensichtlich, da deren Urbilder selbst nur aus einem Punkt bestehen und somit wegen der vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft von X nach Lemma 4.5 (b) abgeschlossen sind. Die anderen Urbilder sind nach Definition 5.12 (a) von der Form $f^{-1}(\{y\}) \sqcup \{y\}$. Auch diese Mengen sind nach Konstruktion 5.11 (a) abgeschlossen in $X \sqcup Y$: Der Punkt $\{y\}$ ist abgeschlossen in Y nach Lemma 4.5 (b), also ist $f^{-1}(\{y\})$ abgeschlossen in A und damit auch in X nach Satz 2.4 (e) und Aufgabe 1.9 (c). □

Beispiel 5.19. Nach Satz 5.18 ist mit I^2 auch das Möbiusband ein normaler Hausdorff-Raum, denn in der Darstellung von Beispiel 5.16 (b) ist die Verklebemenge $A = \{0,1\} \times I$ abgeschlossen. Genauso sieht man, dass auch der Torus, die Kleinsche Flasche und die reelle projektive Ebene aus Beispiel 5.9 (c) normale Hausdorff-Räume sind. Beim Intervall mit doppeltem Mittelpunkt haben wir dagegen schon in Beispiel 5.9 (d) gesehen, dass dieser Raum weder normal noch ein Hausdorff-Raum ist — und in der Tat ist hier in der Darstellung von Beispiel 5.16 (b) die Verklebemenge $A = I \backslash \{\frac{1}{2}\}$ auch nicht abgeschlossen in I.

Die letzte Art zur Erzeugung von Quotientenräumen, die wir hier behandeln wollen, benutzt das Herausteilen von Gruppenoperationen. Im Gegensatz zu den bisher untersuchten Fällen werden dabei nicht nur *manche* Punkte des Ausgangsraumes X mit anderen verklebt, sondern es liegt in der Regel *jeder* Punkt von X in einer nicht-trivialen Äquivalenzklasse.

Definition 5.20 (Gruppenoperationen und Bahnenräume)**.** Es seien X eine Menge und G eine Gruppe mit neutralem Element e.

(a) Eine **(Gruppen-)Operation** von G auf X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot \colon G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

so dass $e \cdot x = x$ und $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ für alle $x \in X$ und $g,h \in G$ (beachte, dass im Ausdruck $(g \cdot h) \cdot x$ der erste Punkt für die Verknüpfung innerhalb der Gruppe G, der zweite für die Gruppenoperation steht). Genau wie bei Gruppenverknüpfungen kann man natürlich auch ein anderes Zeichen als „$\cdot$“ für die Verknüpfung wählen; auch die Schreibweisen gx und $g(x)$ für $g \cdot x$ sind in der Literatur üblich.

(b) Operiert G auf X, so überprüft man leicht, dass

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } g \in G \text{ mit } y = g \cdot x$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Ihre Äquivalenzklassen $\overline{x} = \{g \cdot x : g \in G\}$ heißen **Bahnen** der Gruppenoperation. Die Menge $X/\sim$ dieser Äquivalenzklassen wird daher auch **Bahnenraum** genannt. Man schreibt ihn in der Regel als X/G, auch wenn die Konstruktion dieses Raumes natürlich nicht nur von X und G, sondern auch von der Wahl der Gruppenoperation abhängt.

Bemerkung 5.21 (Stetigkeit der Gruppenoperation)**.** Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X, so definiert jedes Gruppenelement $g \in G$ offensichtlich eine Abbildung

$$\varphi_g : X \to X,\ x \mapsto g \cdot x$$

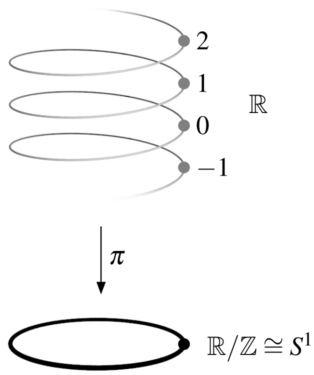
von X in sich, was auch den Namen „Gruppenoperation auf X" erklärt. Die Eigenschaften einer Gruppenoperation aus Definition 5.20 besagen dann gerade $\varphi_e = \mathrm{id}_X$ und $\varphi_{g \cdot h} = \varphi_g \circ \varphi_h$ für alle $g, h \in G$. Insbesondere sind also alle diese Abbildungen φ_g bijektiv, denn es gilt ja

$$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_e = \mathrm{id}_X .$$

Ist X nun sogar ein topologischer Raum, so können wir X/G natürlich wie gewohnt mit der Quotiententopologie ebenfalls als topologischen Raum auffassen. Diese Konstruktion bringt uns aber nur wenig, wenn die topologische Struktur nicht mit der Gruppenoperation verträglich ist. *Wir wollen daher im Folgenden als zusätzliche Bedingung an eine Gruppenoperation auf einem topologischen Raum immer voraussetzen, dass die Abbildungen φ_g stetig (und damit Homöomorphismen) sind.*

Beispiel 5.22. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ operiert durch Addition auf $X = \mathbb{R}$. Nach Definition 5.20 sind die Bahnen dieser Operation die Mengen

$$\overline{x} = \{n + x : n \in \mathbb{Z}\}.$$



Im Bild rechts, in dem die reelle Zahlengerade als Spirale dargestellt ist, besteht eine Bahn also aus direkt übereinander liegenden Punkten, so dass man sich die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als die vertikale Projektion vorstellen kann. Die Abbildung

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1,\ \overline{x} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i x}$$

ist wie in Beispiel 5.9 (a) wohldefiniert, stetig und bijektiv. Damit ist sie nach Folgerung 4.14 aber auch ein Homöomorphismus, da der Startraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (als Bild des kompakten Einheitsintervalls unter der Restklassenabbildung, siehe Folgerung 5.8 (c)) kompakt und der Zielraum S^1 ein Hausdorff-Raum ist. Also ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

Konstruktion 5.23 (Projektive Räume)**.** Eine euch bereits bekannte Gruppenoperation aus den „Grundlagen der Mathematik" ist die Skalarmultiplikation: Für $n \in \mathbb{N}$ operiert die multiplikative Gruppe $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ auf $X = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ durch

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n).$$

Der zugehörige Bahnenraum $X/G = (\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ heißt **(reeller) projektiver Raum** der Dimension n und wird mit $\mathbb{P}^n$ bezeichnet.

Offensichtlich ist diese Konstruktion statt für die reellen Zahlen auch für einen beliebigen anderen Grundkörper K möglich. Man schreibt den zugehörigen projektiven Raum dann in der Regel als $\mathbb{P}^n_K = (K^{n+1}\backslash\{0\})/(K\backslash\{0\})$. Zu einem topologischen Raum wird dies aber natürlich erst, wenn man auf K (und damit auch auf $K^{n+1}\backslash\{0\}$) eine Topologie festgelegt hat. In der Topologie ist der Fall des reellen projektiven Raumes daher der wichtigste; auch $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (mit der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$) tritt manchmal auf.

Nach Konstruktion sind die Elemente von $\mathbb{P}^n$, d. h. die Bahnen der obigen Gruppenoperation, die Mengen

$$\overline{(x_0, \dots, x_n)} = \overline{x} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\},$$

also die Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^{n+1}$ (ohne den Nullpunkt). Dies liefert zwei mögliche geometrische Interpretationsmöglichkeiten für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n$: 07

(a) Jede Ursprungsgerade $\overline{x} \in \mathbb{P}^n$ trifft die Einheitskugel S^n wie im Bild unten links in zwei gegenüberliegenden Punkten. Ist also $\sim$ die Relation auf S^n mit $x \sim -x$ für alle x, so ist die Abbildung

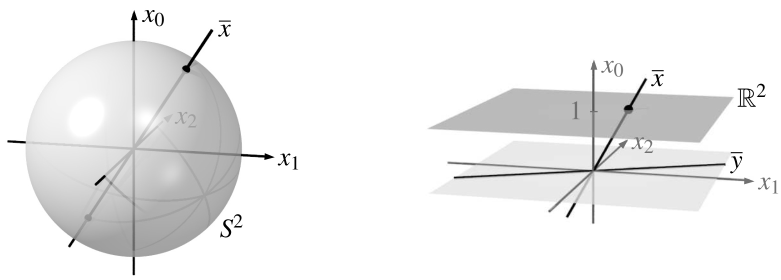
$$f\colon \mathbb{P}^n \to S^n/\sim,\ \overline{x} \mapsto \overline{\left(\frac{x}{||x||}\right)},$$

die jede Ursprungsgerade auf die beiden Schnittpunkte mit S^n abbildet, stetig (da die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{||x||}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ stetig ist, siehe Bemerkung 5.6) und bijektiv mit ebenfalls stetiger Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon S^n/\sim\ \to \mathbb{P}^n,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}.$$

Also ist $\mathbb{P}^n \cong S^n/\sim$. Nach Definition 5.20 können wir dies auch als Bahnenraum $S^n/\mathbb{Z}_2$ schreiben, wobei $\mathbb{Z}_2 \cong (\{1,-1\},\cdot)$ multiplikativ auf S^n operiert.

Insbesondere ist $\mathbb{P}^n$ nach Folgerung 5.8 damit (weg-)zusammenhängend und kompakt, da S^n diese Eigenschaften besitzt.



(a) (b)

(b) Jede Ursprungsgerade $\overline{x} = \overline{(x_0,\dots,x_n)}$ mit $x_0 \neq 0$ schneidet den verschobenen Unterraum $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\} \cong \mathbb{R}^n$ wie im Bild oben rechts in genau einem Punkt. Dies führt zu einer stetigen und injektiven Abbildung

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \overline{(1,x_1,\dots,x_n)},$$

die diesen Schnittpunkt auf die entsprechende Ursprungsgerade abbildet. Durch diese Abbildung g können wir $\mathbb{R}^n$ also als Teilraum von $\mathbb{P}^n$ auffassen. Die nicht im Bild von g liegenden Punkte sind genau die Ursprungsgeraden der Form $\overline{(0,x_1,\dots,x_n)}$, die wie $\overline{y}$ im obigen Bild in dem durch die Gleichung $x_0 = 0$ gegebenen Unterraum liegen. Diese zusätzlichen Punkte von $\mathbb{P}^n$ kann man sich als „Punkte im Unendlichen“ in der entsprechenden Richtung vorstellen: Betrachten wir z. B. eine Gerade

$$\{(x_1,\dots,x_n) + \lambda\,(v_1,\dots,v_n) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

in $\mathbb{R}^n$, so sind die zugehörigen Punkte in $\mathbb{P}^n$ für große λ unter der Einbettung g

$$\overline{(1,x_1+\lambda\,v_1,\dots,x_n+\lambda\,v_n)} = \overline{(\tfrac{1}{\lambda},\tfrac{x_1}{\lambda}+v_1,\dots,\tfrac{x_n}{\lambda}+v_n)},$$

was für $\lambda \to \infty$ gerade gegen den Punkt $\overline{(0,v_1,\dots,v_n)} \in \mathbb{P}^n$ konvergiert, also gegen den „Punkt im Unendlichen“ für den entsprechenden Richtungsvektor. Mit anderen Worten können wir uns den projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ also so vorstellen, dass wir zu $\mathbb{R}^n$ für jede Richtung einen Punkt im Unendlichen hinzufügen.

Aufgabe 5.24. Wir haben in diesem Kapitel zwei Räume kennengelernt, die wir „reelle projektive Ebene“ genannt haben:

(a) $D^2/\sim$ mit der Relation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1$ wie in Beispiel 5.9 (c);

(b) $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3\backslash\{0\})/(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ wie in Konstruktion 5.23.

Zeige, dass diese beiden Konstruktionen homöomorphe Räume ergeben.

Aufgabe 5.25. Eine endliche Gruppe G operiere auf einem normalen Hausdorff-Raum X. Beweise, dass dann auch der Quotientenraum X/G ein normaler Hausdorff-Raum ist.

Insbesondere zeigt dies mit Konstruktion 5.23 (a) also, dass $\mathbb{P}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ ein normaler Hausdorff-Raum ist.

Aufgabe 5.26 (Mannigfaltigkeiten)**.** Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es einen Homöomorphismus $f_x \colon U_x \to V_x$ von einer offenen Umgebung U_x von x in eine offene Teilmenge $V_x \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt einen solchen Raum auch eine n-dimensionale kompakte *Mannigfaltigkeit*; viele unserer in diesem Kapitel konstruierten Räume wie z. B. der Torus, die Kleinsche Flasche oder der reelle projektive Raum (siehe Beispiel 5.9 und Konstruktion 5.23) sind Beispiele dafür.

Man zeige:

(a) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung $A_x \subset U_x$ sowie stetige Funktionen $\tilde{f}_x \colon X \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{g}_x \colon X \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}_x|_{A_x} = f_x|_{A_x}$ und $\tilde{g}_x^{-1}(\{0\}) = A_x$.

(b) X lässt sich für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^N$ einbetten, d. h. X ist homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 5.27. Man zeige:

(a) Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\mathbb{R}^*$ ist eine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit im Sinne von Aufgabe 5.26.

(b) Der Raum $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}^*$ (bei dem $\mathbb{R}^*$ wiederum durch Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^{n+1}$ operiert) ist hingegen keine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit.