# 7. Die Fundamentalgruppe

Im letzten Kapitel haben wir Homotopien von Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen untersucht. Dabei hatten wir bereits erwähnt, dass der für uns wichtigste Fall dieses Konzepts die Homotopie von Schleifen in einem gegebenen Raum $X$ sein wird — genauer gesagt die Homotopie von geschlossenen Wegen mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt $x_0 \in X$, relativ dieser beiden Randpunkte. Wie wir gleich sehen werden, ist der Vorteil dieser speziellen Situation nämlich, dass die Homotopieklassen solcher Wege eine Gruppe bilden. Die Verknüpfung in dieser sogenannten Fundamentalgruppe von $X$ ist dabei einfach das Zusammensetzen der Wege, das neutrale Element wird der konstante Weg $x_0$, und das inverse Element zu einem Weg derselbe Weg mit umgekehrter Orientierung. Auf diese Art kann man dann also topologische Räume mit Hilfe von Gruppen, d. h. mit algebraischen Methoden studieren.

Um die Homotopien zwischen derartigen Wegen einfacher definieren zu können, ist es dabei üblich, die Wege nicht wie in Kapitel 3 durch ein beliebiges kompaktes Intervall, sondern stets durch das Einheitsintervall $I$ zu parametrisieren. Wir vereinbaren daher:

> Ein *Weg* in einem topologischen Raum $X$ sei im Folgenden immer eine stetige Abbildung $\alpha\colon I \to X$.

In unseren Skizzen werden wir solche Wege dabei in der Regel nicht als Abbildung darstellen, sondern nur ihr Bild in $X$ zeichnen, zusammen mit einem Pfeil, der die Orientierung des Weges angibt. Diese Vereinfachung ist dadurch gerechtfertigt, dass wir in Lemma 7.2 (c) unten sehen werden, dass eine orientierungserhaltende Umparametrisierung eines Weges seine Homotopieklasse nicht ändert.

Zur Konstruktion der Fundamentalgruppe müssen wir als Erstes die benötigten Operationen einführen, also das Zusammensetzen und Umkehren von Wegen. Das Zusammensetzen von zwei Wegen ist dabei natürlich nur dann möglich, wenn der zweite Weg genau dort startet, wo der erste aufhört.

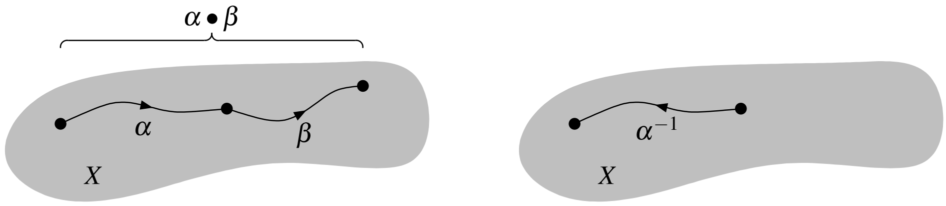
**Definition 7.1** (Zusammengesetzte und inverse Wege)**.** In einem topologischen Raum $X$ seien $\alpha$ und $\beta$ zwei Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$.

(a) Der **zusammengesetzte Weg** $\alpha \bullet \beta$ ist definiert als

$$\alpha \bullet \beta\colon I \to X,\ x \mapsto \begin{cases} \alpha(2x) & \text{für } x \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2x-1) & \text{für } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Der zu $\alpha$ **inverse Weg** $\alpha^{-1}$ ist

$$\alpha^{-1}\colon I \to X,\ x \mapsto \alpha(1-x).$$



(a) (b)

Als Erstes wollen wir zeigen, dass diese Operationen mit Homotopien verträglich sind, und dass orientierungserhaltende Umparametrisierungen eines Weges seine Homotopieklasse nicht ändern.

**Lemma 7.2.** *Es seien $\alpha$ und $\beta$ zwei Wege in einem topologischen Raum $X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Ferner seien $\alpha', \beta'$ zwei weitere Wege mit $\alpha' \simeq \alpha \operatorname{rel}\{0,1\}$ und $\beta' \simeq \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$. Dann gilt:*

(a) $\alpha \bullet \beta \simeq \alpha' \bullet \beta' \operatorname{rel}\{0,1\}$.

(b) $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\}$.

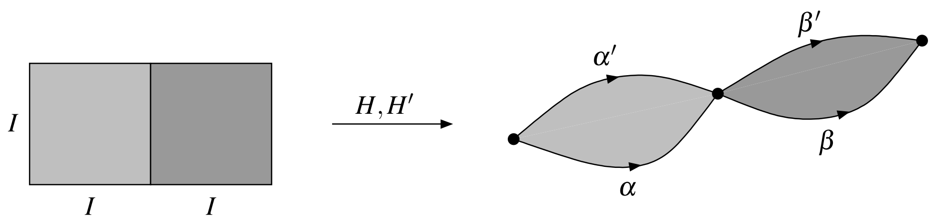
(c) *Ist $\varphi\colon I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, so ist $\alpha \simeq \alpha \circ \varphi \operatorname{rel}\{0,1\}$. (Insbesondere wenn $\varphi$ sogar ein Homöomorphismus ist, kann man sich den Weg $\alpha \circ \varphi$ als orientierungserhaltende Umparametrisierung des Weges $\alpha$ vorstellen.)*

*Beweis.* Es seien $H, H'\colon I \times I \to X$ Homotopien von $\alpha$ nach $\alpha'$ bzw. $\beta$ nach $\beta'$ relativ $\{0,1\}$.

(a) Wie im Bild unten ist

$$I \times I \to X,\ \ (x,t) \mapsto \begin{cases} H(2x,t) & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ H'(2x-1,t) & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Homotopie von $\alpha \bullet \beta$ nach $\alpha' \bullet \beta'$ relativ $\{0,1\}$ (in der Tat sogar relativ $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, aber dies werden wir im Folgenden nicht benötigen).




(b) Die Abbildung $I \times I \to X,\ (x,t) \mapsto H(1-x,t)$ ist eine Homotopie zwischen $\alpha^{-1}$ und $(\alpha')^{-1}$ relativ $\{0,1\}$.

(c) Da das Einheitsintervall $I$ konvex ist, ist $\mathrm{id}_I \simeq \varphi \operatorname{rel}\{0,1\}$ nach Beispiel 6.3 (b). Also folgt nach Lemma 6.6 (b) auch $\alpha = \alpha \circ \mathrm{id}_I \simeq \alpha \circ \varphi \operatorname{rel}\{0,1\}$. □

Als Nächstes wollen wir sehen, dass das Zusammensetzen von Wegen modulo Homotopie relativ der Randpunkte die Eigenschaften einer Gruppenverknüpfung erfüllt.

**Lemma 7.3** (Gruppenaxiome für das Zusammensetzen von Wegen)**.** *Es sei wieder $X$ ein topologischer Raum.*

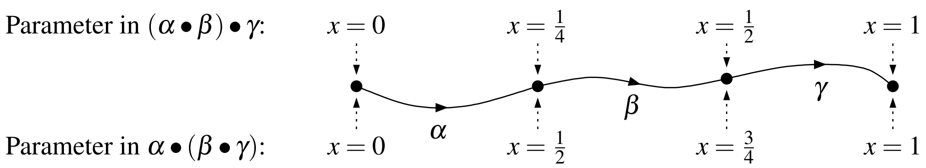
(a) *Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ Wege in $X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$, so gilt $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \simeq \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) \operatorname{rel}\{0,1\}$.*

(b) *Ist $\alpha$ ein Weg in $X$ und $\varepsilon$ der konstante Weg am Punkt $\alpha(0)$, so ist $\varepsilon \bullet \alpha \simeq \alpha \operatorname{rel}\{0,1\}$.*

(c) *Ist $\alpha$ ein Weg in $X$ und $\varepsilon$ der konstante Weg am Punkt $\alpha(1)$, so ist $\alpha^{-1} \bullet \alpha \simeq \varepsilon \operatorname{rel}\{0,1\}$.*

*Beweis.*

(a) Sowohl $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ als auch $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$ durchlaufen in $X$ der Reihe nach die drei Wege $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Allerdings tun sie dies nach unserer Definition von zusammengesetzten Wegen mit unterschiedlichen Parametrisierungen: Während der erste Weg z. B. beim Parameterwert $x = \frac{1}{2}$ am Punkt $(\alpha \bullet \beta)(1) = \gamma(0)$ ist, ist der zweite Weg dann am Punkt $\alpha(1) = (\beta \bullet \gamma)(0)$. Dies ist im folgenden Bild dargestellt.



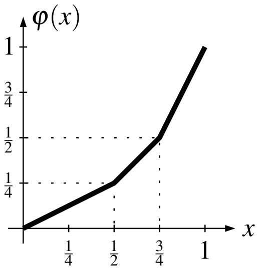
Der Weg $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$ ist also eine Umparametrisierung von $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ — genauer gesagt gilt

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \big((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma\big) \circ \varphi$$

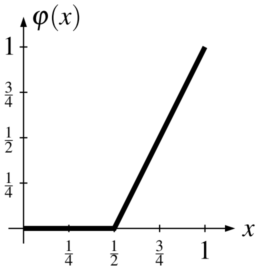
mit der unten links dargestellten Funktion $\varphi\colon I \to I$. Die behauptete Homotopie ergibt sich damit aus Lemma 7.2 (c).

(b) Offensichtlich ist $\varepsilon \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ mit der unten in der Mitte eingezeichneten Funktion $\varphi$. Damit ergibt sich die Aussage wieder aus Lemma 7.2 (c).

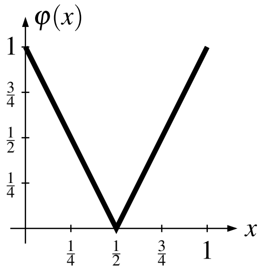
(c) Nach Definition des zusammengesetzten Weges ist $\alpha^{-1} \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ mit der unten rechts eingezeichneten Funktion $\varphi$. Da $I$ konvex ist, ist $\varphi$ nach Beispiel 6.3 (b) in diesem Fall relativ $\{0,1\}$ homotop zur konstanten Abbildung 1. Durch Verketten mit $\alpha$ sehen wir also mit Lemma 6.6 (b), dass $\alpha^{-1} \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ homotop relativ $\{0,1\}$ zur konstanten Abbildung $\alpha(1)$ ist.



(a)



(b)



(c) □

Wir können unsere Ergebnisse nun zur zentralen Definition der Fundamentalgruppe zusammensetzen. Damit alle betrachteten Wege verknüpfbar und die konstanten Wege in Lemma 7.3 (b) und (c) die gleichen sind, müssen wir dabei voraussetzen, dass die Wege geschlossen sind und einen vorher festgelegten Anfangs- und Endpunkt haben. Aufgrund der Homotopie relativ $\{0,1\}$ bedeutet das dann natürlich, dass auch in den Homotopien die Wege geschlossen bleiben und den vorgegebenen Anfangs- und Endpunkt behalten müssen.

**Definition 7.4** (Fundamentalgruppe). Es seien $X$ ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Basispunkt — man nennt das Paar $(X,x_0)$ dann auch einen **punktierten topologischen Raum**. Wir bezeichnen mit

$$\Gamma(X,x_0) := \{\alpha\colon I \to X \text{ stetig mit } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

die Menge aller geschlossenen Wege in $X$ mit Anfangs- und Endpunkt $x_0$, und mit

$$\pi_1(X,x_0) := \Gamma(X,x_0) \,/ \simeq \mathrm{rel}\,\{0,1\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen solcher Wege modulo Homotopie relativ $\{0,1\}$. Wir schreiben Äquivalenzklassen modulo Homotopie relativ $\{0,1\}$ im Folgenden als $[\cdot]$, um Verwechslungen mit anderen Äquivalenzklassenbildungen (z. B. bei der Quotiententopologie) zu vermeiden.

Die Verknüpfung

$$[\alpha] \bullet [\beta] := [\alpha \bullet \beta]$$

ist nun nach Lemma 7.2 (a) wohldefiniert und macht $\pi_1(X,x_0)$ nach Lemma 7.3 zu einer Gruppe. Das neutrale Element in dieser Gruppe ist die Klasse des konstanten Weges bei $x_0$, und das zu $[\alpha]$ inverse Element ist $[\alpha^{-1}]$.

Man nennt $\pi_1(X,x_0)$ mit dieser Verknüpfung die **Fundamentalgruppe** von $X$ mit Basispunkt $x_0$. Wie in allgemeinen Gruppen üblich schreibt man das neutrale Element dieser Gruppe oft einfach als 1. Ein Weg $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ mit $[\alpha] = 1 \in \pi_1(X,x_0)$ heißt **nullhomotop**.

**Bemerkung 7.5.**

(a) Der Index 1 in der allgemein üblichen Bezeichnung $\pi_1(X,x_0)$ für die Fundamentalgruppe kommt daher, dass diese Gruppe *eindimensionale* Objekte, nämlich geschlossene Wege im

Raum $X$ beschreibt. In der allgemeinen Homotopietheorie, die wir in dieser Vorlesung nicht weiter verfolgen werden, kann man eine analoge Konstruktion auch mit stetigen Abbildungen $\alpha\colon I^k \to X$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ durchführen, die auf dem gesamten Rand des $k$-dimensionalen Einheitswürfels den Wert $x_0$ annehmen, und erhält so die sogenannten höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X,x_0)$.

(b) Nach Beispiel 5.9 (a) bzw. 5.16 (a) ist die Kreislinie $S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $I/\{0,1\}$, und nach Bemerkung 5.6 sind stetige Abbildungen $I \to X$, die die Punkte 0 und 1 auf $x_0$ abbilden, unter diesem Homöomorphismus damit das gleiche wie stetige Abbildungen $S^1 \to X$, die den Punkt 1 auf $x_0$ abbilden. Eine analoge Aussage gilt für die Starträume $S^1 \times I$ und $(I/\{0,1\}) \times I$ von Homotopien solcher Schleifen. Man kann die Räume $\Gamma(X,x_0)$ und $\pi_1(X,x_0)$ aus Definition 7.4 damit äquivalent auch als

$$\Gamma(X,x_0) = \{f\colon S^1 \to X \text{ stetig mit } f(1) = x_0\}$$
$$\text{bzw.} \quad \pi_1(X,x_0) = \{f\colon S^1 \to X \text{ stetig mit } f(1) = x_0\}/\simeq \operatorname{rel}\{1\}$$

schreiben. Wir haben diese Art der Darstellung von geschlossenen Wegen nur deshalb nicht gewählt, weil das Zusammensetzen von Wegen in dieser Schreibweise komplizierter aussehen würde.

**Beispiel 7.6.** Wir hatten in Beispiel 6.3 (c) bereits gesehen (wenn auch noch nicht bewiesen), dass die Abbildungen $f\colon S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ x \mapsto x$ und $g\colon S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ x \mapsto 1$ nicht homotop zueinander sind. Sie sind damit also erst recht nicht homotop relativ $\{1\}$, und bestimmen gemäß Bemerkung 7.5 (b) demnach verschiedene Elemente in $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\},1)$. Insbesondere ist die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\},1)$ also nicht die triviale Gruppe. (Wir werden im nächsten Kapitel in Beispiel 8.16 (a) sehen, dass $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\},1) \cong \mathbb{Z}$ gilt.)

**Aufgabe 7.7** (Fundamentalgruppe von Produkten)**.** Es seien $(X,x_0)$ und $(Y,y_0)$ zwei punktierte topologische Räume. Zeige, dass

$$\pi_1(X \times Y,(x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0).$$

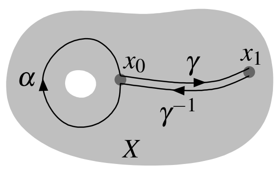
Um auf der Menge der Homotopieklassen von Wegen in einem Raum $X$ durch Zusammensetzen eine Gruppenstruktur zu definieren, mussten wir einen Anfangs- und Endpunkt $x_0 \in X$ für diese Wege festhalten. Wir wollen nun untersuchen, in wie weit die resultierende Fundamentalgruppe von der Wahl dieses Basispunktes abhängt.

**Satz 7.8** (Unabhängigkeit der Fundamentalgruppen vom Basispunkt)**.** *Es sei $\gamma$ ein Weg in einem topologischen Raum $X$ mit Startpunkt $x_0$ und Endpunkt $x_1$.*

*Dann ist die Abbildung*

$$f\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1),\ [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$$

*wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus.*




*Insbesondere gilt also: Ist $X$ wegzusammenhängend, so hängt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ bis auf Isomorphie nicht von der Wahl des Basispunktes $x_0$ ab. Wir bezeichnen sie daher dann oft auch einfach mit $\pi_1(X)$.*

*Beweis.* Die Abbildung $f$ ist natürlich wohldefiniert nach Lemma 7.2 (a) und 7.3 (a). Sie ist ein Morphismus, denn nach den Rechenregeln aus Lemma 7.3 und der Definition der Verknüpfung von Homotopieklassen in Definition 7.4 gilt

$$f([\alpha]) \bullet f([\beta]) = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] \bullet [\beta] \bullet [\gamma] = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\beta] \bullet [\gamma] = f([\alpha] \bullet [\beta])$$

für alle $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X,x_0)$. Außerdem ist sie bijektiv mit Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(X,x_0),\ [\alpha] \mapsto [\gamma] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma^{-1}],$$

denn für alle $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ gilt mit den gleichen Rechenregeln

$$f^{-1}(f([\alpha])) = f^{-1}([\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]) = [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] = [\alpha],$$

und genauso auch $f(f^{-1}([\alpha])) = [\alpha]$ für alle $[\alpha] \in \pi_1(X,x_1)$. $\square$

**Bemerkung 7.9.** In nicht wegzusammenhängenden Räumen können wir eine Unabhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt wie in Satz 7.8 natürlich nicht erwarten: Da alle betrachteten Schleifen ja immer komplett in einer Wegzusammenhangskomponente bleiben müssen, beschreibt $\pi_1(X,x_0)$ nur die Komponente, in der $x_0$ liegt. Gibt es also mehrere solche Komponenten, sind die Fundamentalgruppen bezüglich Basispunkten in verschiedenen Komponenten völlig unabhängig voneinander.

**Definition 7.10** (Einfach zusammenhängende Räume)**.** Ein topologischer Raum $X$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend ist und für die (nach Satz 7.8) dann basispunktunabhängige Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \{1\}$ gilt.

09

**Bemerkung 7.11.** Ein wegzusammenhängender Raum $X$ ist nach Bemerkung 7.5 (b) genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f\colon S^1 \to X$ homotop relativ $\{1\}$ zu einer konstanten Abbildung ist. Nach Aufgabe 6.4 ist dies äquivalent dazu, dass jedes solche $f$ (nicht-relativ) homotop zu einer konstanten Abbildung ist, also dass sich jede Schleife in $X$ (ohne Festhalten eines Basispunktes) zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Man sagt dazu manchmal auch, dass jede Schleife *frei homotop* zu einer konstanten Abbildung ist.

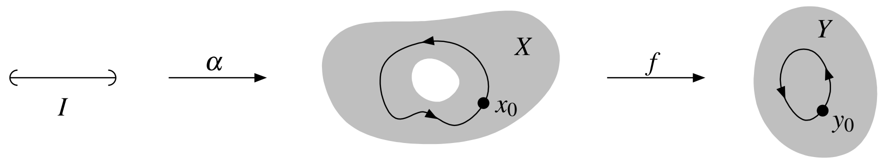
Bisher haben wir in diesem Kapitel jedem punktierten topologischen Raum $(X,x_0)$ eine Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ zugeordnet. Da wir diese Fundamentalgruppen auch miteinander vergleichen möchten, wollen wir nun sehen, dass stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen stets Gruppenhomomorphismen zwischen den zugehörigen Fundamentalgruppen induzieren. Die Idee hinter dieser Konstruktion ist sehr einfach, da man mit einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ durch Verketten mit einem (geschlossenen) Weg $\alpha\colon I \to X$ in $X$ natürlich auch einen geschlossenen Weg $f \circ \alpha\colon I \to Y$ in $Y$ erzeugen kann.

**Lemma und Konstruktion 7.12** (Morphismen zwischen Fundamentalgruppen)**.** *Es seien* $(X,x_0)$ *und* $(Y,y_0)$ *punktierte topologische Räume und* $f\colon X \to Y$ *eine stetige Abbildung mit* $f(x_0) = y_0$ *— man sagt dann auch, dass* $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ *eine stetige Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen ist.*

(a) *Die Abbildung*

$$f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0),\ [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

*ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.*




(b) *Ist* $g\colon (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ *eine weitere stetige Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen, so gilt* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ *als Abbildung von* $\pi_1(X,x_0)$ *nach* $\pi_1(Z,z_0)$.

*Beweis.*

(a) Die Abbildung $f_*$ ist wohldefiniert, denn aus $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel} \{0,1\}$ folgt nach Lemma 6.6 (b) sofort auch $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta \operatorname{rel} \{0,1\}$. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn nach Definition 7.1 sind sowohl $f \circ (\alpha \bullet \beta)$ als auch $(f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta)$ gleich dem Weg

$$I \to Y,\ x \mapsto \begin{cases} f(\alpha(2x)) & \text{für } x \le \frac{1}{2}, \\ f(\beta(2x-1)) & \text{für } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Nach Definition gilt für alle $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$
$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])). \qquad \square$$

**Bemerkung 7.13** (Kategorien und Funktoren)**.** Ihr kennt sicher schon viele mathematische Strukturen, in denen man zunächst gewisse Objekte und dann Morphismen zwischen diesen Objekten einführt und untersucht: z. B. Gruppen mit Gruppenhomomorphismen zwischen ihnen, Ringe mit Ringhomomorphismen, Körper mit Körperhomomorphismen, Vektorräume mit linearen Abbildungen, oder wie in dieser Vorlesung (punktierte) topologische Räume mit stetigen Abbildungen.

Bis zu einem gewissen Grad stellt man sich bei allen diesen Strukturen zunächst einmal immer die gleichen Fragen: Man möchte z. B. injektive und surjektive Abbildungen untersuchen sowie Isomorphismen einführen, Unter- und Quotientenstrukturen zur Verfügung haben oder Produkte konstruieren. Es ist daher natürlich naheliegend zu fragen, in wie weit man diese Konzepte abstrahieren und für alle diese Strukturen gemeinsam einführen und untersuchen kann.

Dies ist die zentrale Fragestellung der sogenannten *Kategorientheorie*. Ganz grob gesprochen definiert man dort eine *Kategorie* als etwas, das dadurch gegeben ist, dass man angibt, was die betrachteten Objekte und was die zugehörigen Morphismen sein sollen. So bilden also z. B. Gruppen, Vektorräume oder (punktierte) topologische Räume jeweils eine Kategorie.

Unsere Konstruktion der Fundamentalgruppe können wir nun als eine Art Abbildung zwischen der Kategorie der punktierten topologischen Räume und der Kategorie der Gruppen auffassen: Wir ordnen ja jedem punktierten topologischen Raum eine Gruppe zu. In Konstruktion 7.12 haben wir nun darüber hinaus gesehen, dass diese Zuordnung auch mit den Morphismen der jeweiligen Kategorien verträglich ist: Ein Morphismus zwischen zwei punktierten topologischen Räumen (also eine stetige Abbildung zwischen ihnen) führt zu einem Morphismus der zugehörigen Fundamentalgruppen, und diese Operation ist wie in Lemma 7.12 (b) mit der Verkettung von Morphismen verträglich.

In diesem Sinne könnte man die Fundamentalgruppenkonstruktion also sogar als einen „Morphismus“ zwischen der Kategorie der punktierten topologischen Räume und der Kategorie der Gruppen ansehen: Sie ist eine Abbildung zwischen den beiden Kategorien, die mit der Struktur einer Kategorie (nämlich der Angabe, was die Morphismen sein sollen) verträglich ist. Um hier eine sprachliche Verwirrung zu vermeiden — man würde ja dann von Morphismen zwischen Kategorien reden, wobei Kategorien aber ihrerseits wieder Morphismen beinhalten — hat man sich jedoch entschieden, hier nicht von einem „Morphismus von Kategorien“ zu sprechen, sondern dafür einen anderen Namen einzuführen: Man bezeichnet eine derartige „strukturerhaltende Abbildung zwischen Kategorien“ wie z. B. die Fundamentalgruppe als einen *Funktor* zwischen den beiden Kategorien.

Wir wollen hier jedoch nicht weiter auf die Sprache der Kategorientheorie eingehen, da sie für uns außer einer abstrakteren und vielleicht etwas eleganteren Sprechweise keine weiteren Vorteile bringen würde.

Als Anwendung der Konstruktion 7.12 wollen wir aber zum Abschluss dieses Kapitels schließlich noch die Aussage zeigen, dass homotopieäquivalente Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Weil Fundamentalgruppen letztlich Mengen von Homotopieklassen von Abbildungen sind, ist dies natürlich zu erwarten.

**Satz 7.14** (Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter Räume)**.** *Es seien $X$ und $Y$ topologische Räume, sowie $x_0 \in X$.*

(a) *Ist $f\colon X \to X$ homotop zur Identität auf $X$, so ist $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,f(x_0))$ ein Isomorphismus.*

(b) *Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$ ein Isomorphismus.*

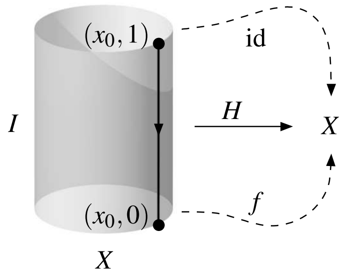
*Insbesondere haben (wegzusammenhängende) homotopieäquivalente Räume also isomorphe Fundamentalgruppen.*

*Beweis.*

(a) Es sei $H: X \times I \to X$ eine Homotopie zwischen $f$ und $\mathrm{id}_X$, so dass also $H(\cdot,0) = f$ und $H(\cdot,1) = \mathrm{id}_X$ gilt (die Abbildung rechts zeigt diese Situation im Fall $X = S^1$). Ferner sei

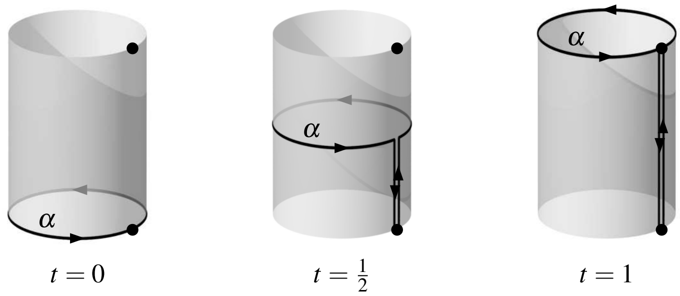
$$\gamma: I \to X,\ x \mapsto H(x_0, 1-x);$$

offensichtlich ist dies ein Weg in $X$ von $H(x_0,1) = x_0$ nach $H(x_0,0) = f(x_0)$. In der Skizze ist er das Bild der senkrecht eingezeichneten Linie unter $H$.




Für einen gegebenen Weg $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ ist die Abbildung

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x_0, 3t\,x) & \text{für } x \le \frac{1}{3}, \\ H(\alpha(3x-1),t) & \text{für } \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}, \\ H(x_0, 3t\,(1-x)) & \text{für } x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$$




von $I \times I$ nach $X$ nun eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ zwischen einer Umparametrisierung von $f \circ \alpha$ (für $t = 0$) und einer Umparametrisierung von $\gamma^{-1} \bullet (\alpha \bullet \gamma)$ (für $t = 1$); sie ist das Bild unter $H$ der in der obigen Skizze eingezeichneten Deformation eines Weges in $X \times I$. Da Umparametrisierungen nach Lemma 7.2 (c) nichts an der Homotopieklasse ändern, ist also $[f \circ \alpha] = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$ in $\pi_1(X, f(x_0))$ — d. h. $f_*$ stimmt mit der Abbildung

$$\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,f(x_0)),\ \ [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$$

überein, die nach Satz 7.8 ein Isomorphismus ist.

(b) Es sei $g: Y \to X$ ein Homotopieinverses zu $f$. In der Sequenz

$$\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X,g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(g(f(x_0))))$$

gilt für die Verkettungen der ersten bzw. letzten beiden Abbildungen dann $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ nach Lemma 7.12 (b), wegen $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ sind diese beiden Verkettungen $g_* \circ f_*$ und $f_* \circ g_*$ nach (a) also Isomorphismen. Beachte dabei, dass hier zwar nur eine Abbildung $g_*$ auftritt, die beiden mit $f_*$ bezeichneten Abbildungen aufgrund der unterschiedlichen Basispunkte aber in der Regel verschieden sind.

Insgesamt ist die mittlere Abbildung $g_*$ der obigen Sequenz damit sowohl surjektiv (weil $g_* \circ f_*$ surjektiv ist) als auch injektiv (weil $f_* \circ g_*$ injektiv ist), also ein Isomorphismus. Die erste Abbildung $f_* = (g_*)^{-1} \circ (g_* \circ f_*)$ ist also als Verkettung zweier Isomorphismen wie behauptet ebenfalls ein Isomorphismus. □

**Beispiel 7.15.**

(a) Ist $X$ kontrahierbar, so ist $X$ nach Bemerkung 6.9 (b) wegzusammenhängend, und nach Satz 7.14 ist $\pi_1(X)$ isomorph zur Fundamentalgruppe eines Punktes, also die triviale Gruppe. Damit ist jeder kontrahierbare Raum einfach zusammenhängend. (Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht, wie wir in Bemerkung 8.22 sehen werden.)

(b) Nach Beispiel 6.12 (b) ist die Kreislinie $S^1$ homotopieäquivalent zur gelochten Ebene $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Damit haben diese beiden Räume isomorphe Fundamentalgruppen. Ebenfalls die gleiche Fundamentalgruppe (nämlich $\mathbb{Z}$, siehe Beispiel 8.16 (a)) ergibt sich für jeden anderen dazu homotopieäquivalenten Raum, z. B. für jeden Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ mit $0 < r \leq R$.

**Aufgabe 7.16.** Es sei $X$ eine *topologische Gruppe*, d. h. ein topologischer Raum, der gleichzeitig eine Gruppenstruktur hat, so dass die Verknüpfung $X \times X \to X$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$ und die Inversenbildung $X \to X$, $a \mapsto a^{-1}$ stetig sind. Wie üblich bezeichne $e \in X$ das neutrale Element von $X$.

Zeige, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,e)$ dann abelsch ist. Welche der Gruppenaxiome werden im Beweis benötigt und welche nicht?

(Hinweis: $\alpha \bullet \beta = (\alpha \bullet \varepsilon) \cdot (\varepsilon \bullet \beta)$, wobei $\varepsilon$ den konstanten Weg bei $e$ bezeichnet.)