OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE.

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = \{1\}$ da $gx = x \iff gxx^{-1} = xx^{-1} \iff g = 1$

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = \{1\}$ da $gx = x \iff gxx^{-1} = xx^{-1} \iff g = 1$

  (Jeder Stabilisator ist trivial)

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = \{1\}$ da $gx = x \iff gxx^{-1} = xx^{-1} \iff g = 1$

  (Jeder Stabilisator ist trivial)

- $\mathcal{O}_x = \{gx \mid g \in G\} = G$

OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

BEISPIELE. Sei stets $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Operation von G auf $X = G$ durch Linksmultiplikation:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gx \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = \{1\}$ da $gx = x \iff gxx^{-1} = xx^{-1} \iff g = 1$

  (Jeder Stabilisator ist trivial)

- $\mathcal{O}_x = \{gx \mid g \in G\} = G$ da $\forall \tilde{g} \in X = G: \ \tilde{g} = (\tilde{g}x^{-1})x$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

(b) Operation von G auf X = G durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\}$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} =: C_G(x)$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} =: C_G(x)$ heißt Zentralisator von x in G.

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} =: C_G(x)$ heißt Zentralisator von x in G.
- $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} =: C_G(x)$ heißt Zentralisator von x in G.
- $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} =: [x]$

(b) Operation von G auf $X = G$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1} = c_g(x) \end{aligned}$$

Für $x \in X = G$ gilt:

- $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\} =: C_G(x)$ heißt Zentralisator von x in G.
- $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} =: [x]$ heißt Konjugiertenklasse von x in G.

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G \}$, wobei $U \leq G$:

(c) Operation von G auf $X = \{\text{LNK von } U \text{ in } G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(c) Operation von G auf $X = \{\text{LNK von } U \text{ in } G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G$

(c) Operation von G auf $X = \{\text{LNK von } U \text{ in } G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(c) Operation von G auf $X = \{\text{LNK von } U \text{ in } G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{U \leq G\}$ durch 'Konjugation':

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G \}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G \}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G \}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G \}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{ g \in G \mid gUg^{-1} = U \}$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G \}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G \}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{ g \in G \mid gUg^{-1} = U \} =: N_G(U)$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G\}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\} =: N_G(U)$ heißt Normalisator von U in G.

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G\}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\} =: N_G(U)$ heißt Normalisator von U in G.

  Anmerkung: $U \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(U) = G$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G\}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\} =: N_G(U)$ heißt Normalisator von U in G.

  Anmerkung: $U \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(U) = G$

- $\mathcal{O}_U = \{gUg^{-1} \mid g \in G\}$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G\}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G\}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\} =: N_G(U)$ heißt Normalisator von U in G.

  Anmerkung: $U \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(U) = G$

- $\mathcal{O}_U = \{gUg^{-1} \mid g \in G\} =: [U]$

(c) Operation von G auf $X = \{$ LNK von U in $G \}$, wobei $U \leq G$:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, xU) &\longmapsto g.xU := gxU \end{aligned}$$

(Anmerkung: $U = \{1_G\} \Rightarrow X = G \rightsquigarrow$ liefert wieder Operation (a).)

(d) Operation von G auf $X = \{ U \leq G \}$ durch 'Konjugation':

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, U) &\longmapsto g.U := gUg^{-1} \end{aligned}$$

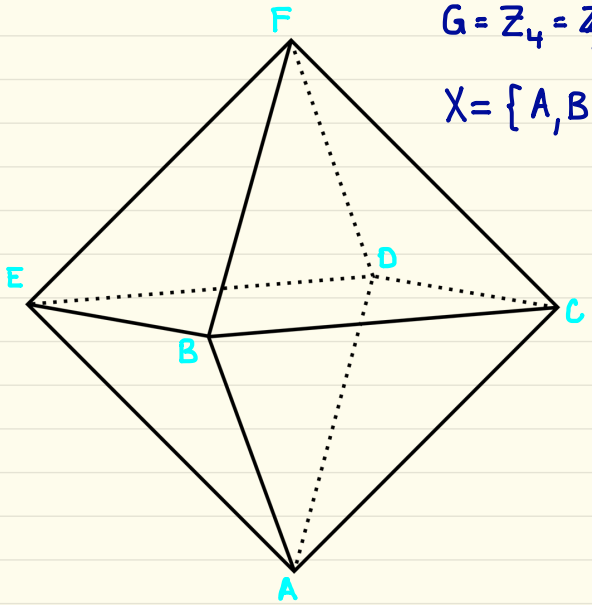
Für $U \in X$ gilt:

- $G_U = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\} =: N_G(U)$ heißt Normalisator von U in G.

  Anmerkung: $U \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(U) = G$

- $\mathcal{O}_U = \{gUg^{-1} \mid g \in G\} =: [U]$ heißt Konjugiertenklasse von U in G.

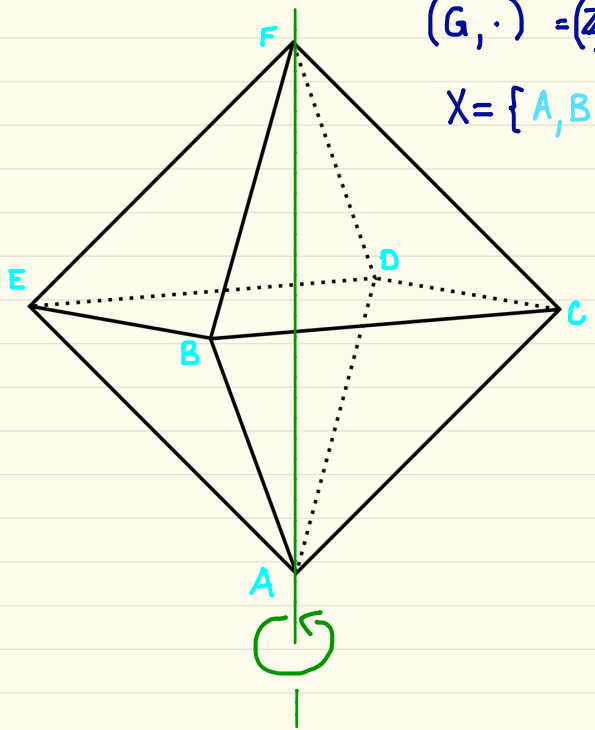
(c) Operation von $G = Z_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$G = Z_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

(c) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



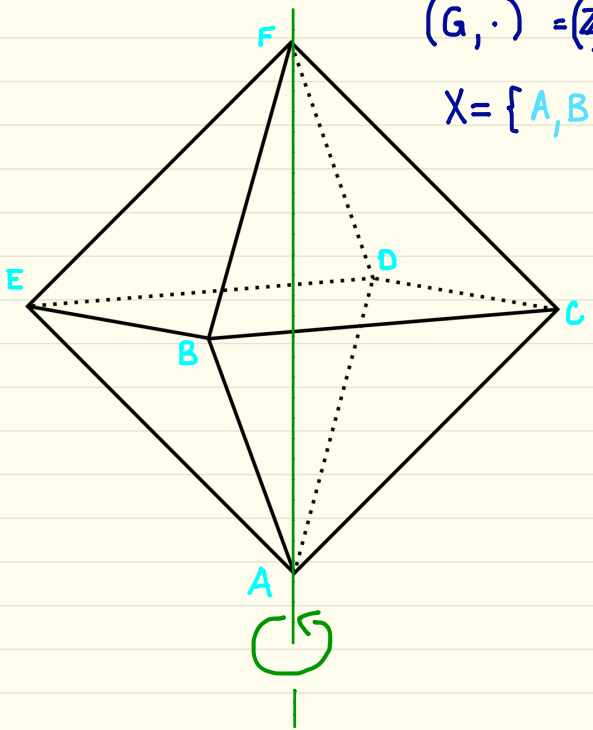
$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} \cdot - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

(c) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

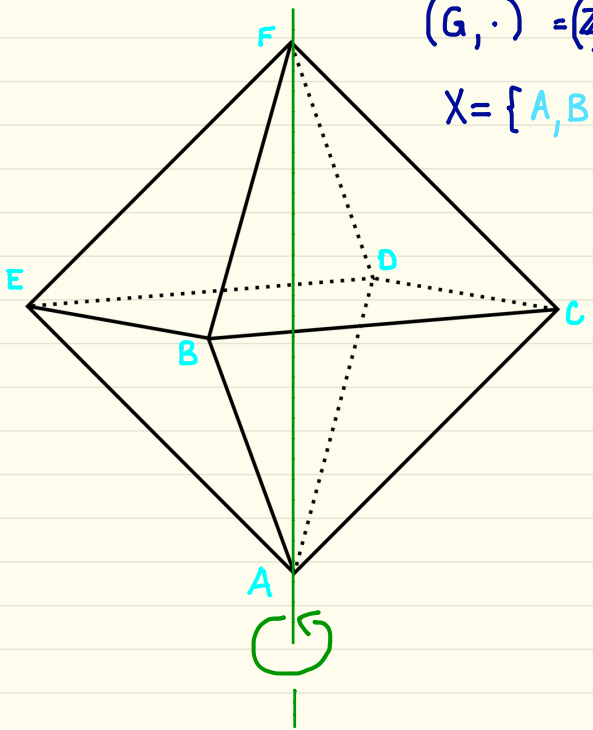
$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

$\cdot$	A	B	C	D	E	F
$\bar{0}$						
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						

(c) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

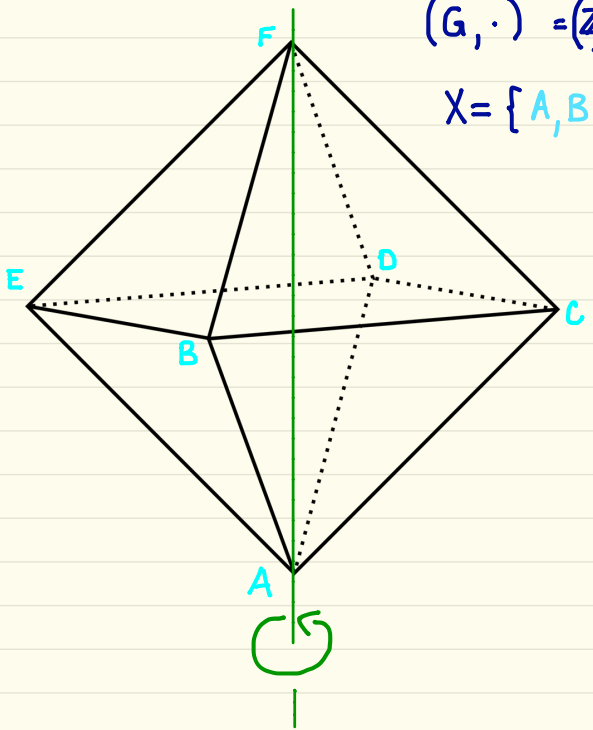
$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} \cdot - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

$\cdot$	A	B	C	D	E	F
$\bar{0}$ ($0°$)						
$\bar{1}$ ($90°$)						
$\bar{2}$ ($180°$)						
$\bar{3}$ ($270°$)						

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

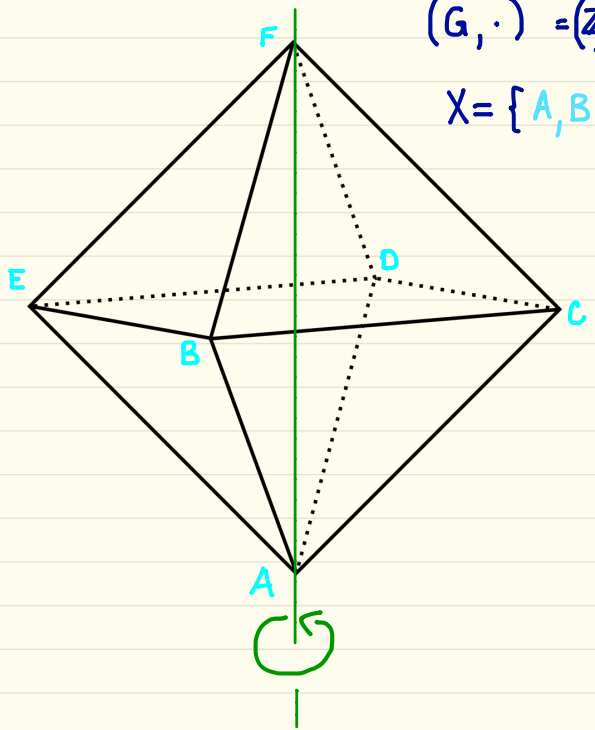
$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

	$\cdot$	A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$	A					F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$	A					F	
$(180°)$	$\bar{2}$	A					F	
$(270°)$	$\bar{3}$	A					F	

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

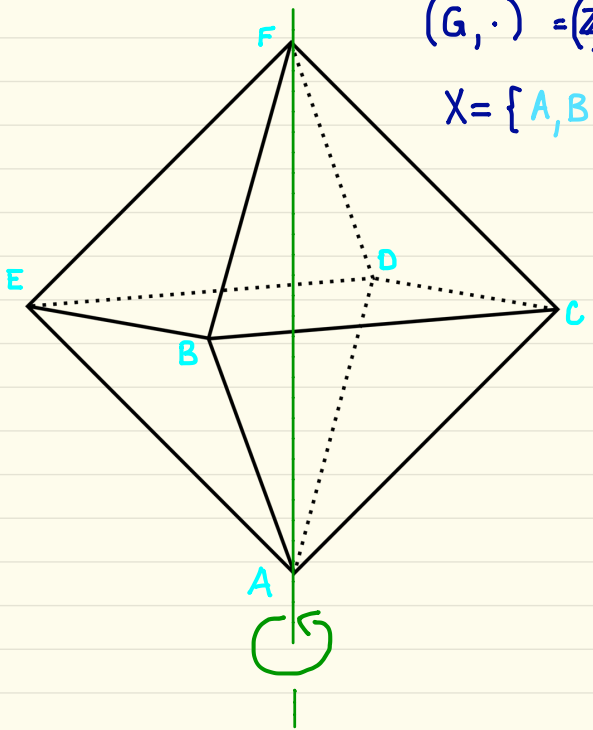
$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

	$\cdot$	A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$	A					F	
$(180°)$	$\bar{2}$	A					F	
$(270°)$	$\bar{3}$	A					F	

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

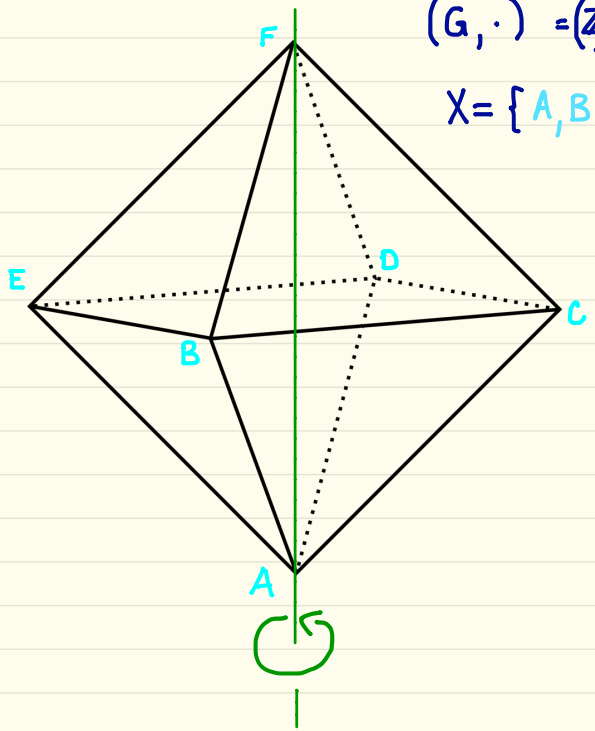
$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

$\cdot$		A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$	A	C	D	E	B	F	
$(180°)$	$\bar{2}$	A	D	E	B	C	F	
$(270°)$	$\bar{3}$	A	E	B	C	D	F	

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

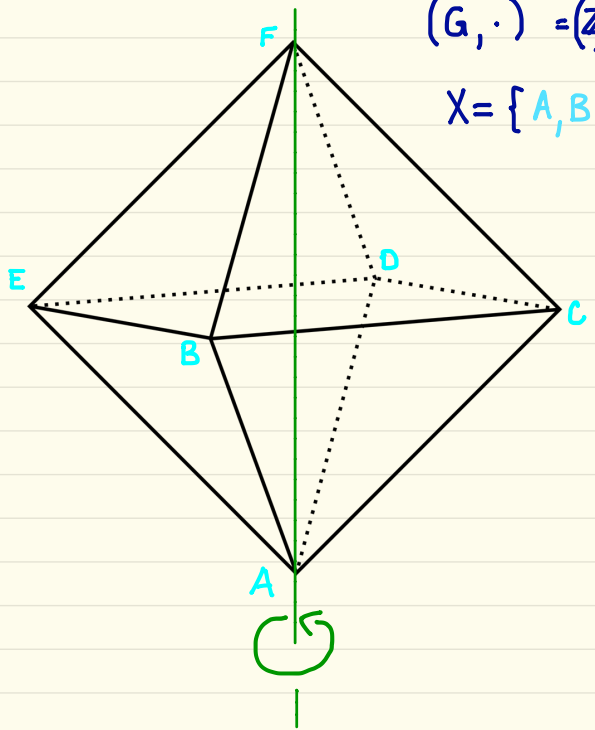
Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

		.	A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$		A	B	C	D	E	F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$		A	C	D	E	B	F	
$(180°)$	$\bar{2}$		A	D	E	B	C	F	
$(270°)$	$\bar{3}$		A	E	B	C	D	F	

Bahnen:

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

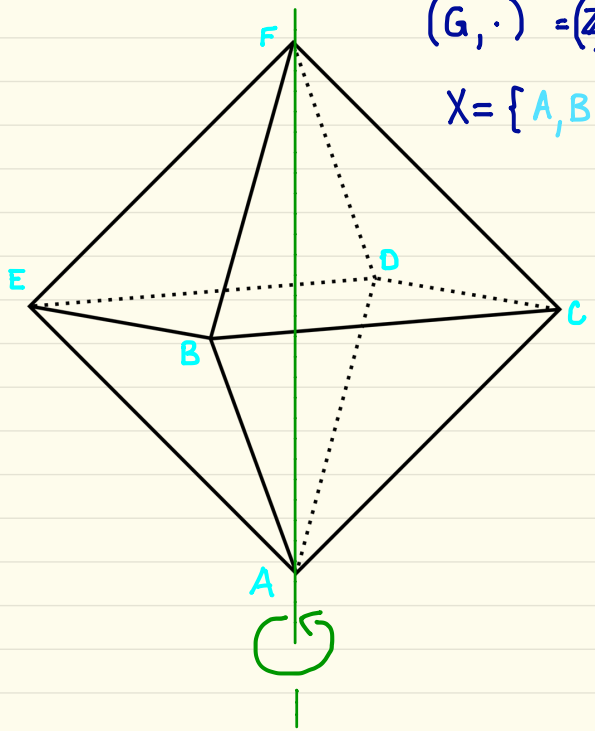
Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} \cdot - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

$\cdot$		A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$	A	C	D	E	B	F	
$(180°)$	$\bar{2}$	A	D	E	B	C	F	
$(270°)$	$\bar{3}$	A	E	B	C	D	F	

Bahnen: $\mathcal{O}_A = \{A\}$ $\mathcal{O}_F = \{F\}$

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

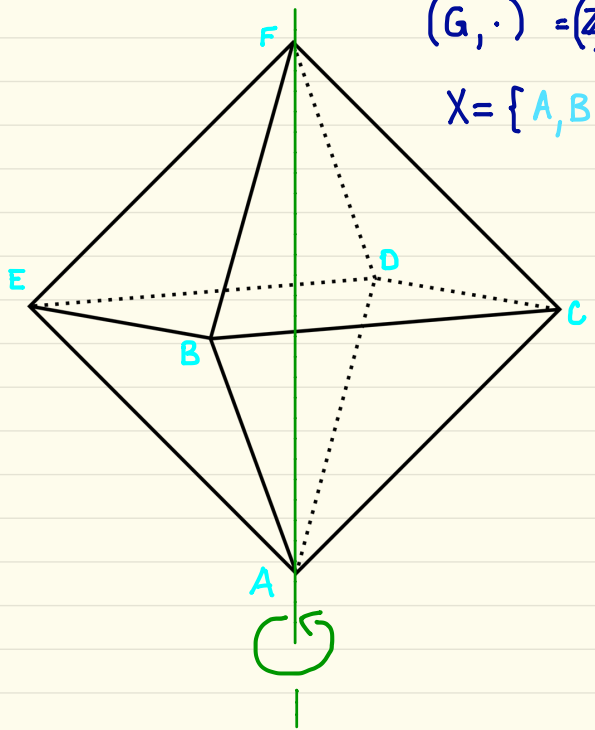
Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} \cdot - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

$\cdot$		A	B	C	D	E	F	
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F	} (GM1)
$(90°)$	$\bar{1}$	A	C	D	E	B	F	
$(180°)$	$\bar{2}$	A	D	E	B	C	F	
$(270°)$	$\bar{3}$	A	E	B	C	D	F	

Bahnen: $\mathcal{O}_A = \{A\}$ $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_E = \{B, C, D, E\}$ $\mathcal{O}_F = \{F\}$

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

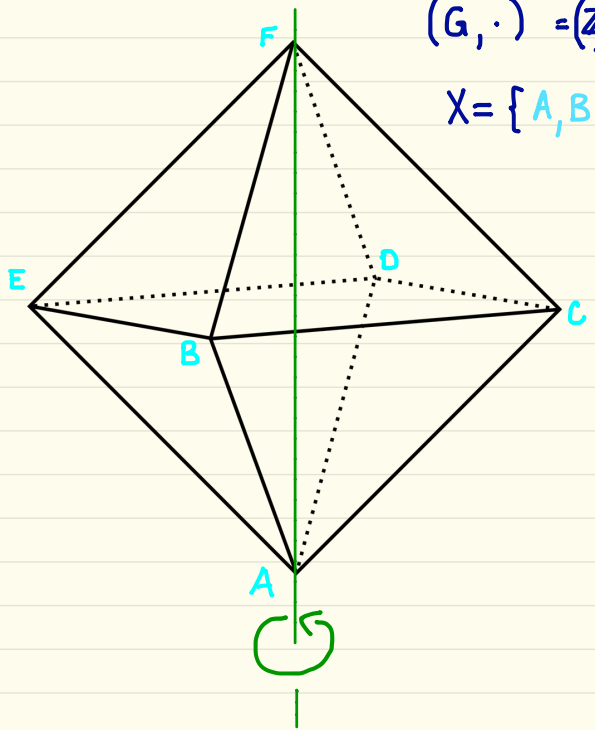
	$\cdot$	A	B	C	D	E	F
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F
$(90°)$	$\bar{1}$	A	C	D	E	B	F
$(180°)$	$\bar{2}$	A	D	E	B	C	F
$(270°)$	$\bar{3}$	A	E	B	C	D	F

} (GM1)

Bahnen: $\mathcal{O}_A = \{A\}$ $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_E = \{B, C, D, E\}$ $\mathcal{O}_F = \{F\}$

Stabilisatoren:

(e) Operation von $G = \mathbb{Z}_4$ auf X = reguläres Oktaeder:



$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (neutrales Element: $\bar{0}$)

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

Operation $\cdot : G \times X \longrightarrow X$

$\bar{a} . - :=$ Drehung um $a \cdot 90°$

	$\cdot$	A	B	C	D	E	F
$(0°)$	$\bar{0}$	A	B	C	D	E	F
$(90°)$	$\bar{1}$	A	C	D	E	B	F
$(180°)$	$\bar{2}$	A	D	E	B	C	F
$(270°)$	$\bar{3}$	A	E	B	C	D	F

} (GM1)

Bahnen: $\mathcal{O}_A = \{A\}$ $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_E = \{B, C, D, E\}$ $\mathcal{O}_F = \{F\}$

Stabilisatoren: $G_A = G$ $G_B = G_C = G_D = G_E = \{\bar{0}\}$ $G_F = G$