Ringvorlesung SS21: Endliche Gruppen und Ihre Darstellungstheorie

JProf. Dr. Caroline Lassueur

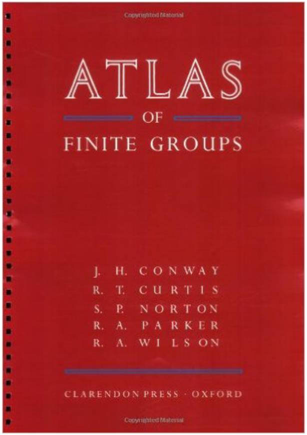
6. Juli 2021

Die *AMS Mathematics Subject Classification 2020*

Die *Mathematics Subject Classification* (MSC) ist eine Klassifikation für die Bereiche der Mathematik. Sie wird von der *American Mathematical Society* herausgegeben. Jedes Buch und jeder mathematische Artikel wird mit einer oder mehreren Klassen zwischen **00** und **97** versehen, die ihn einem mathematischen Teilgebiet zuordnen.

Die **Gruppentheorie** und die **Darstellungstheorie** gehören zu den Klassen **20** und **18**.

Siehe: https://zbmath.org/classification/



Veröffentlicht: Dezember 1985, von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker and R. Wilson.

Enthählt Information über die 93 *kleinsten* **nichtableschen einfachen endlichen Gruppen**.

Z.B.: Ordnungen, maximale Untergruppen, Automorphismen, Konjugiertenklassen,. . .
und Charaktertafeln!

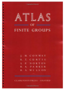
Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

SATZ (Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen)
Eigenschaft **(E)** gilt für alle endlichen Gruppen, falls Eigenschaft **(E)** für alle *einfachen* endlichen Gruppen gilt.

Konsequenz: Man muss die **einfachen endlichen Gruppen** so gut wie möglich verstehen!

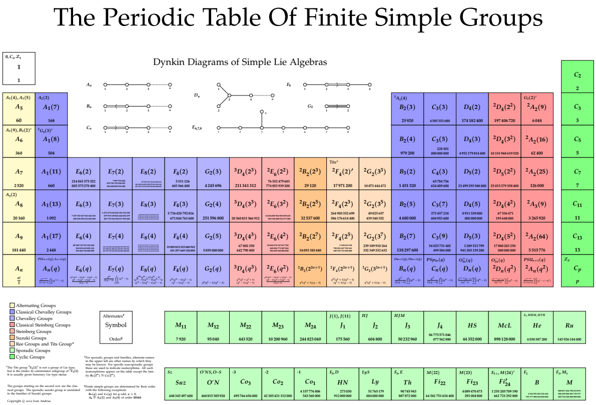
$\rightsquigarrow$ Bedeutung der ATLAS



Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
- die **Gruppen vom Lie-Typ** über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (16 jeweils unendliche Familien): $PSL_n(q)$, $PGU_n(q)$, $O_{2n}^{\pm}(q)$, ...
- **26 sporadischen Gruppen**: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Co_1, Co_2, Co_3, He, McL, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ly, Ru, $O'N$, Th, HN, B ("Baby Monster") und M ("Monster")

Dauer: 1832 (Galois) – 1983 (Gorenstein) (oder eher 2008 (Harada-Solomon))


The Periodic Table Of Finite Simple Groups
Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras
Alternating Groups
Classical Chevalley Groups
Chevalley Groups
Classical Steinberg Groups
Steinberg Groups
Suzuki Groups
Ree Groups and Tits Group*
Sporadic Groups
Cyclic Groups
Symbol
Order‡
M11
M12
M22
M23
M24
J1
J2
J3
J4
HS
McL
He
Ru
Suz
O'N
Co3
Co2
Co1
HN
Ly
Th
Fi22
Fi23
Fi'24
B
M
C2
C3
C5
C7
C11
C13
Cp
A5
A6
A7
A8
A9
An

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Bemerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen ($\Longrightarrow$ Computeralgebra!)
- Es gibt einen Begriff von **Isomorphie** für Darstellungen und einen Begriff von **irreduzibilität** (d.h.: ist nicht die Summe zweier kleineren Darstellungen)
- Bis auf Isomorphie, hat eine endliche Gruppe G nur endlich viele Darstellungen.

SATZ
$\#\{$irred. Darstellungen von G bis auf Isom.$\} = \#\{$Konjugiertenklassen von $G\} =: r$

In der Tat kann man viele Eigenschaften der Gruppen und ihre Darstellungen durch ihre **Charaktere** bestimmen:

DEFINITION
Sei $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ eine **Darstellung** von G. Die Abbildung

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \mathsf{Spur}(\rho(g))$$

heisst **Charakter** der Darstellung ρ.

DEFINITION
Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C})\,,$$

wobei $\chi_1, \ldots, \chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1, \ldots, g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

BEISPIELE.

1. Die Kleinsche Vierergruppe $G = C_2 \times C_2 = \langle g\rangle \times \langle h\rangle$ mit $g^2 = 1, h^2 = 1, gh = hg$.

$C_2 \times C_2$	1	g	h	gh
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

Die Charaktertafel: Beispiele

2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	1	g	g^2	$\cdots$	g^{n-1}
$\chi_1 = \mathbf{1_G}$	1	1	1	$\ldots$	1
χ_2	1	ζ	ζ^2	$\ldots$	ζ^{n-1}
χ_3	1	ζ^2	ζ^4	$\ldots$	$\zeta^{2(n-1)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
χ_n	1	ζ^{n-1}	$\zeta^{2(n-1)}$	$\ldots$	$\zeta^{(n-1)^2}$

$\zeta :=$ primitive $n-$ th root of unity

3. S_3	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Im ATLAS-Format ist die Charaktertafel der alternierenden Gruppe A_5:

	$1a$	$2a$	$3a$	$5a$	$5b$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	A	$*A$
χ_3	3	-1	0	$*A$	A
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

$$A = (1-\sqrt{5})/2, \qquad *A = (1+\sqrt{5})/2$$

$$1 \in 1a, \quad (1,2)(3,4) \in 2a, \quad (1,2,3) \in 3a,$$
$$(1,2,3,4,5) \in 5a, \quad (1,3,5,2,4) \in 5b$$

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \ \forall\ g \in G \setminus \{1\}, \forall\ \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- ...

ABER die folgenden Eigenschaften können NICHT von der Charaktertafel gelesen werden:

- G bis auf Isomorphie (Z.B.: D_8 und Q_8 haben dieselben Charaktertafel!)
- alle Untergruppen
- Ordnungen der Elemente
- ...

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

Wir lesen:

- $|G| = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \ldots = 168\,;$
- G ist nicht abelsch;
- G ist einfach

$\Rightarrow$ G ist die einzige einfache Gruppe der Ordnung 168,
d.h. $G = \mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{SL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

Eine aktuelle offene Forschungsfrage ist es:

die Characktertafeln der Gruppen vom Lie-Typ zu berechnen.