Ringvorlesung SS18: Endliche Gruppen und Ihre Darstellungstheorie

JProf. Dr. Caroline Lassueur

28. Juni 2018

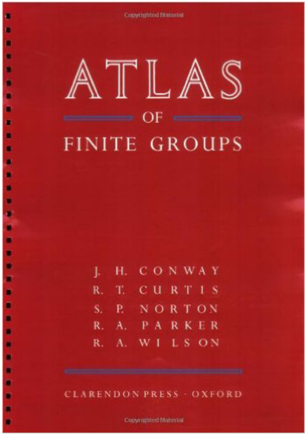
Die *AMS Mathematics Subject Classification*

Die *Mathematics Subject Classification* (MSC) ist eine Klassifikation für die Bereiche der Mathematik. Sie wird von der *American Mathematical Society* herausgegeben. Jedes Buch und jeder mathematische Artikel wird mit einer oder mehreren Klassen zwischen **00** und **97** versehen, die ihn einem mathematischen Teilgebiet zuordnen.

Die **Gruppentheorie** und die **Darstellungstheorie** gehören zu den Klassen **20** und **18**.

Siehe: https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html

Der ATLAS der endlichen Gruppen



Veröffentlicht: Dezember 1985, von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker and R. Wilson.

Enthählt Information über die 93 *kleinsten* **nichtableschen einfachen endlichen Gruppen**.
Z.B.: Ordnungen, maximale Untergruppen, Automorphismen, Konjugiertenklassen,. . .
und Charaktertafeln!

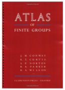
Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

> **SATZ (Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen)**
> Eigenschaft **(E)** gilt für alle endlichen Gruppen, falls Eigenschaft **(E)** für alle *einfachen* endlichen Gruppen gilt.

Konsequenz: Man muss die **einfachen endlichen Gruppen** so gut wie möglich verstehen!

$\rightsquigarrow$ Bedeutung der ATLAS

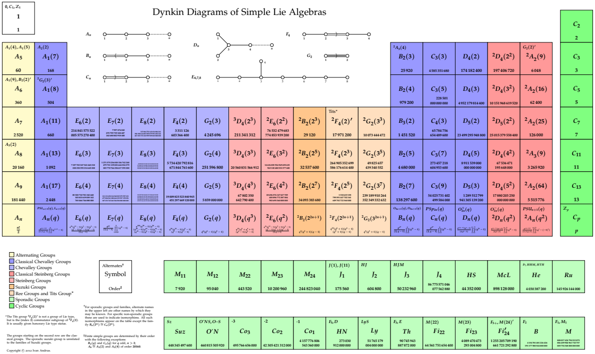


Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
- die **Gruppen vom Lie-Typ** über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (16 jeweils unendliche Familien): $PSL_n(q)$, $PGU_n(q)$, $O^{\pm}_{2n}(q)$, $\ldots$
- **26 sporadische Gruppen**: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Co_1, Co_2, Co_3, He, McL, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ly, Ru, $O'N$, Th, HN, B ("Baby Monster") und M ("Monster")

Dauer: 1832 (Galois) – 1983 (Gorenstein) (oder eher 2008 (Harada-Solomon))

The Periodic Table Of Finite Simple Groups



Darstellungen einer Gruppe:

Ab jetzt: G ist eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ ist der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Bemerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen ($\Longrightarrow$ Computeralgebra!)
- Es gibt einen Begriff von **Isomorphie** für Darstellungen und einen Begriff von **irreduzibilität** (d.h.: ist nicht die Summe zweier kleineren Darstellungen)

- Bis auf Isomorphie, hat eine endliche Gruppe G nur endlich viele Darstellungen.

SATZ

$\#\{$irred. Darstellungen von G bis auf Isom.$\} = \#\{$Konjugiertenklassen von $G\} =: r$

In der Tat kann man viele Eigenschaften der Gruppen und ihre Darstellungen durch ihre **Charaktere** bestimmen:

DEFINITION

Sei $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ eine **Darstellung** von G. Die Abbildung

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, g \mapsto Spur(\rho(g))$$

heisst **Charakter** der Darstellung ρ.

Die Charaktertafel von G:

DEFINITION

Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C})\,,$$

wobei $\chi_1,\ldots,\chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1,\ldots,g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

Beispiel: Die Charaktertafel von A_5

Die Charaktertafel der alternierenden Gruppe A_5 ist (im ATLAS-Format):

	$1a$	$2a$	$3a$	$5a$	$5b$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	A	$*A$
χ_3	3	-1	0	$*A$	A
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

$$A = (1-\sqrt{5})/2, \qquad *A = (1+\sqrt{5})/2$$

$$1 \in 1a, \quad (1,2)(3,4) \in 2a, \quad (1,2,3) \in 3a,$$

$$(1,2,3,4,5) \in 5a, \quad (1,3,5,2,4) \in 5b$$

Eine aktuelle offene Forschungsfrage ist es:

die Characktertafeln der Gruppen vom Lie-Typ zu berechnen.