

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 7

Abgabetermin: 21.12.2015, 14:00h

Hinweis: Aufgaben 2 und 3 beziehen sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 16.12.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgaben bis nach der Vorlesung oder lesen Sie bis Satz 6.17 im Skript von Andreas Gathmann.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Teilmengen $U \subset G$ sind Normalteiler von G ?

- (a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $U = \{1, -1\}$;
- (b) $G = S_n$, $U = \{\sigma \in S_n : \sigma(2) = 2\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;
- (c) $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, N ein Normalteiler von H und $U = \varphi^{-1}(N)$;
- (d) $\phi : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, N ein Normalteiler von H und $U = \phi(N)$;
- (e) G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe von G mit $|U| = \frac{1}{2}|G|$;
- (f) G eine Gruppe mit $|G| = 56$, $U = \langle a, b \rangle$ für gewisse $a, b \in G$ mit $\text{ord}(a) = 4$ und $\text{ord}(b) = 7$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler in G . Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen wohldefiniert und bijektiv sind:

- (a) $\{U \mid U \leq G \text{ mit } U \supset N\} \rightarrow \{\bar{U} \mid \bar{U} \leq G/N\}$, $U \mapsto U/N$
- (b) $\{M \mid U \trianglelefteq G \text{ mit } U \supset N\} \rightarrow \{\bar{M} \mid \bar{M} \trianglelefteq G/N\}$, $M \mapsto M/N$ (**Präsenzaufgabenteil**)

D.h. die Untergruppen und Normalteiler der Faktorgruppe G/N entsprechen den Untergruppen und Normalteilern von G , die N enthalten.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie:

$$UN/N \cong U/U \cap N.$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass UN/N und $U/U \cap N$ in der Tat Faktorgruppen sind.