TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2016 - 2.Übungsblatt

Abgabetermin: 12.5.2016, 16:00h

Aufgabe 1. Die Liouvillesche λ-Funktion ist definiert durch

$$\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (-1)^{\sum_{p\in\mathbb{P}} n_p(z)}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die zahlentheoretische Funktion λ ist multiplikativ.

(b) Für die Summatorfunktion von λ gilt für alle $z \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\lambda * e(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } a \in \mathbb{Z} \text{ gibt: } a^2 = z, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Es gilt $\lambda(z) = \sum\limits_{\substack{1\leq d\leq z \\ d^2\mid z}} \mu(\frac{z}{d^2})$ für alle $z \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Aufgabe 2. Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie **vier** der folgenden Aussagen:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $a > b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$.

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $\varphi(a) \mid \varphi(a^b)$.

(d) Für $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit r verschiedenen Primfaktoren, so gilt $2^{r-1} \mid \varphi(a)$.

(e) Hat $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ höchstens neun verschiedene Primfaktoren, so gilt $\varphi(a) > \frac{a}{7}$.

(f) Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, so dass für alle $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $\varphi(a + k) > \varphi(a)$.

Aufgabe 3.

(a) Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $M_p := 2^p - 1$. Zeigen Sie, dass $M_p \mid 2^{M_p} - 2$.

(b) Es sei $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine natürliche Zahl, so dass $6m + 1$, $12m + 1$ und $18m + 1$ Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass die Zahl $n = (6m + 1)(12m + 1)(18m + 1)$ eine Carmichael Zahl ist, d.h., es gilt $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$.

Aufgabe 4. Benutzen Sie den Satz von Wilson um die folgende Aussage zu beweisen: Für eine Zahl $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ist $(p, p + 2)$ genau dann ein Primzahlzwilling (d.h. $p, p + 2 \in \mathbb{P}$), wenn

$$4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \mod p(p + 2).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $p \geq 2$ auch die Umkehrung des Satzes von Wilson gilt, also dass gilt: $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ist genau dann eine Primzahl wenn $(p - 1)! \equiv -1 \mod p$.