TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2016 - 6.Übungsblatt

Abgabetermin: 7.7.2016, 16:00h

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[\omega_{-1}]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

(b) $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]^* = \{\pm 1, \pm\omega_{-3}, \pm\omega_{-3}^2\}$.

(c) $\mathbb{Z}[\omega_m]^* = \{\pm 1\}$ falls $m \in \mathbb{Z}_{<0} \backslash \{-1, -3\}$ quadratfrei.

Aufgabe 2. Es sei $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ eine quadratfreie Zahl. Zeigen Sie:

(a) Das Minimum $\epsilon = \min\{x \in \mathbb{Z}[\omega_n]^* \mid x > 1\}$ existiert.

(b) $\mathbb{Z}[\omega_m]^*_{>0} := \{x \in \mathbb{Z}[\omega_m]^* \mid x > 0\} = \langle \epsilon \rangle$.

(c) $\mathbb{Z}[\omega_m]^* = \{\pm\epsilon^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\} \cdot \mathbb{Z}[\omega_m]^*_{>0} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie unendlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2 - 5y^2 = -1$.

Aufgabe 4.

(a) Für $1 \neq m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei bezeichne $B(m) := \{N(a) \mid 0 \neq a \in \mathbb{Z}[\omega_m]\}$ die Menge der Normen von $\mathbb{Z}[\omega_m] \backslash \{0\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

  (i) $n \in B(-7) \Rightarrow 2n \in B(-7)$,

  (ii) $n \in B(7) \Rightarrow 2n \in B(7)$.

(b) Zeigen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ zwei teilerfremde ganze Zahlen und ist $1 \neq m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, so sind x und y auch teilerfremd in $\mathbb{Z}[\omega_m]$.