

Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: **24.5.2017, 15:15h**

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit Hilfe der Siebformel $|\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 100, 3 \nmid n, 17 \nmid n, 22 \nmid n, 41 \nmid n\}|$.

Hinweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle Teilmengen $M \subset \{3, 17, 22, 41\}$ gilt: Jede Zahl aus M teilt n genau dann, wenn n vom Produkt aller Zahlen aus M geteilt wird.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_7.$$

- Schreiben Sie σ als Verkettung disjunkter Zyklen sowie als Verkettung von Transpositionen.
- Geben Sie die durch σ definierte Zerlegung von $\{1, \dots, 7\}$ an. Wie viele Teilmengen k enthält diese Zerlegung? Wie viele $\tau \in S_7$ gibt es, die eine Zerlegung von $\{1, \dots, 7\}$ in k Teilmengen definieren?

Aufgabe 3.

- Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, die Menge $\{1, \dots, 7\}$ in zwei oder fünf Teilmengen zu zerlegen.
- Veranschaulichen Sie die Rekursionsformel (Satz 7.5) der Partitionszahl $P(n, k)$ für $n = 0, \dots, 8$ und $k = 0, \dots, n$ ähnlich den Veranschaulichungen für die Stirling-Zahlen („Stirling-Dreiecke“) wie in der Vorlesung.

Aufgabe 4. Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $Q(n, k)$ die Anzahl der ungeordneten Summenzerlegungen $n = n_1 + \dots + n_k$ mit k Summanden $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $Q(n, k) = P(n + k, k)$, und geben Sie eine Rekursionsformel für $Q(n, k)$ an.

Hinweis: Finden Sie eine Bijektion zwischen ungeordneten Summenzerlegungen $n = n_1 + \dots + n_k$ mit k Summanden $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und ungeordneten Summenzerlegungen $n + k = n'_1 + \dots + n'_k$ mit k Summanden $n'_1, \dots, n'_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.