

## Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: **24.5.2017, 15:15h**

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie mit Hilfe der Siebformel  $|\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 100, 3 \nmid n, 17 \nmid n, 22 \nmid n, 41 \nmid n\}|$ .

*Hinweis:* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle Teilmengen  $M \subset \{3, 17, 22, 41\}$  gilt: Jede Zahl aus  $M$  teilt  $n$  genau dann, wenn  $n$  vom Produkt aller Zahlen aus  $M$  geteilt wird.

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_7.$$

- Schreiben Sie  $\sigma$  als Verkettung disjunkter Zyklen sowie als Verkettung von Transpositionen.
- Geben Sie die durch  $\sigma$  definierte Zerlegung von  $\{1, \dots, 7\}$  an. Wie viele Teilmengen  $k$  enthält diese Zerlegung? Wie viele  $\tau \in S_7$  gibt es, die eine Zerlegung von  $\{1, \dots, 7\}$  in  $k$  Teilmengen definieren?

**Aufgabe 3.**

- Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, die Menge  $\{1, \dots, 7\}$  in zwei oder fünf Teilmengen zu zerlegen.
- Veranschaulichen Sie die Rekursionsformel (Satz 7.5) der Partitionszahl  $P(n, k)$  für  $n = 0, \dots, 8$  und  $k = 0, \dots, n$  ähnlich den Veranschaulichungen für die Stirling-Zahlen („Stirling-Dreiecke“) wie in der Vorlesung.

**Aufgabe 4.** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen mit  $Q(n, k)$  die Anzahl der ungeordneten Summenzerlegungen  $n = n_1 + \dots + n_k$  mit  $k$  Summanden  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $Q(n, k) = P(n + k, k)$ , und geben Sie eine Rekursionsformel für  $Q(n, k)$  an.

*Hinweis:* Finden Sie eine Bijektion zwischen ungeordneten Summenzerlegungen  $n = n_1 + \dots + n_k$  mit  $k$  Summanden  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  und ungeordneten Summenzerlegungen  $n + k = n'_1 + \dots + n'_k$  mit  $k$  Summanden  $n'_1, \dots, n'_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .