TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 28.05.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 23.

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n+3}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} x^n$.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(-n)^n} x^n$.

Aufgabe 24. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchy - Produktes $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$ den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Aufgabe 25. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, konvergiert.

(b) Die Folge $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Den Grenzwert der beiden Folgen bezeichnen wir als *eulersche Zahl* e.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Aufgabe 14 (a) und betrachten Sie $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.
Hinweis zu (c): Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Betrachten Sie hierzu den Beweis von Aufgabe 14 (a) und $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ für ein $m < n$.

Aufgabe 26.

(a) Zeigen Sie durch explizites Nachprüfen der ε - δ - Definition, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig ist.

(b) Sei $f : [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive und monoton wachsende Funktion zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen. Zeigen Sie, dass f dann stetig ist.