TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure | Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 14

Abgabetermin: Freitag, 26.10.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 55.

(a) Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

(b) Seien $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom f vom Grad n gibt mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots .n + 1$.

Hinweis: Sie dürfen, ohne Beweis, die Formel $x^n - y^n = (x-y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ verwenden.

Aufgabe 56. Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\mathrm{Spur}(A)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.