Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 20

Abgabetermin: Freitag, 07.12.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 77. Sei $M = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ der Vektorraum der reellen Zahlenfolgen und seien $A, B \in M$. Zeigen Sie:

(a) Für die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+x}$ gilt $f(z) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $z \leq x + y$.

(b) Die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1+|a_k - b_k|}$ definiert eine Metrik auf M.

Aufgabe 78. Sei $V = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $p \in V$ ein beliebiger, jedoch fest gewählter Punkt. Wir definieren

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|_2, & \text{falls x, y und p auf einer Geraden liegen,} \\ \|x - p\|_2 + \|p - y\|_2, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $d(x, y)$ eine Metrik auf V definiert.

(b) Charakterisieren Sie alle möglichen offenen Kugeln mit Radius 1 im $\mathbb{R}^2$, die in dieser Metrik vorkommen können.

Aufgabe 79. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir versehen $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit der euklidischen Norm $\|A\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Zeigen Sie für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$.

(b) $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

(c) Ist $\|A\|_2 < 1$, so ist $E - A$ invertierbar und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1}$.

Aufgabe 80. Sei $V = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie:

(a) $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) $(V, \|\cdot\|_1)$ ist kein Banachraum.