TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure　　　　Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Abschlussklausur

02. Februar 2019

Name: ______________________　　　　Matrikel-Nr.: ______________

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)**.** Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Von der Matrix A ist bekannt, dass A genau zwei ganzzahlige Eigenwerte besitzt und $\det(A) = 3$ gilt. Dies müssen Sie nicht beweisen.

(a) Bestimmen Sie eine Jordannormalform J von A.

(b) Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ an, sodass gilt $J = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)**.** Wir definieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

und betrachten die Abbildung $b_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T Ay$,

(a) Zeigen Sie, dass b_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes $U = \langle e_1, e_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarproduktes b_A.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 5x + 5y$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und klassifizieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie alle Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $M := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\big\}$ eine kompakte, 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x) = e^y\}$ ist kompakt.

(b) Ist M eine nicht-leere Menge, $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf M und $f : M \to M$ eine surjektive Abbildung, so ist $d_f : M \times M \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$ eine Metrik.

(c) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $h : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ integrierbar und es gilt:

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\right).$$

(d) Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$, so ist f diagonalisierbar.

– Bitte wenden –

Aufgabe 5 (2 + 3 Punkte)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Zudem existiert ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq c \cdot \|x - y\|_2^b.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $b \geq 1$, so ist f gleichmäßig stetig.

(b) Ist $b > 1$, so ist f total differenzierbar.

Aufgabe 6 (3 + 3 Punkte)**.** Sei V ein endlichdimensionaler, unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ mit der Eigenschaft, dass $f^* = f^n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle Eigenwerte λ von f gilt $|\lambda| \in \{0, 1\}$.

(b) f ist unitär genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 7 (4 + 3 Punkte)**.** Sei (M, d) ein vollständiger, nicht-leerer metrischer Raum. Weiterhin sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von M mit

(i) $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \ldots$ und

(ii) für alle $x, y \in X_n$ gilt die Ungleichung $d(x, y) < \frac{1}{n}$.

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $X = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} X_n$ enthält genau ein Element.

(b) Ist (M, d) nicht vollständig, so ist die Aussage aus Teilaufgabe (a) falsch.

Aufgabe 8 (6 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit der Eigenschaft, dass ∂D eine abgeschlossene, $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie, dass D messbar ist.

– Viel Erfolg –