A14

(a) Sei $x \in K$ fest und L kompakt. $K \cap L = \emptyset \Rightarrow x \notin L$

$\Rightarrow \exists\, U_x, V_x$ mit $x \in U_x$, $L \subset V_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$.

$\Rightarrow (U_x)_{x \in K}$ ist offene Überdeckung von $K \Rightarrow \exists$ endl. Indexmenge I mit

$$K \subset \bigcup_{x \in I} U_x =: U \qquad \text{Setze } V = \bigcap_{x \in I} V_x \Rightarrow$$

$K \subset U$, $L \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$

(b) Sei $x \in X$ und $K \subseteq X$ kompakt mit $x \notin K$.

Sei $y \in K$ bel. $\Rightarrow \exists\, U_y, V_y$ offen mit $\underset{x}{U_y} \cap \underset{y}{V_y} = \emptyset$

$\Rightarrow (V_y)_{y \in K}$ ist offene Überdeckung von K. $\Rightarrow \exists$ endl. Indexmenge I mit

$$K \subseteq \bigcup_{y \in I} V_y =: V. \qquad \text{Setze } U := \bigcap_{y \in I} U_y$$

$\Rightarrow$ $x \in U$, $K \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$

A15

(a) $Y \subseteq X$ abg , $A \subseteq Y$ abg , $B \subseteq Y$ abg , $A \cap B = \emptyset$

Nun wird $A, B \subseteq X$ abg $\Rightarrow \exists\, \tilde{U}, \tilde{V} \subseteq X$ offen mit $\tilde{U} \supseteq A$, $\tilde{V} \supseteq B$ $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$

$\Rightarrow$ $U = \tilde{U} \cap Y$, $V = \tilde{V} \cap Y$ trennen A, B in Y

(b) $U' \subseteq Y$ offen $\Rightarrow \exists\, \tilde{U}' \subseteq X$ offen mit $\tilde{U}' \cap Y = U'$ und $A \subseteq \tilde{U}'$ $\left(\begin{array}{c} \tilde{U}' := \tilde{U}'' \cup X \setminus Y \\ \text{wobei } \tilde{U}'' \cap Y = U' \\ \text{bel.} \end{array} \right)$

Wegen $U' \subseteq Y \setminus V' \Rightarrow \overline{U'} \subseteq Y \setminus V' \Rightarrow \overline{U'} \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$ $\underbrace{(A \cup \overline{U'})}_{\text{abg. in } X} \cap B = \emptyset$

Nun existieren, da X normal, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{T}_X$ mit $A \cup \overline{U'} \subseteq \tilde{U}$, $B \subseteq \tilde{V}$

Setzte $U := \tilde{U}' \cap \tilde{U}$, $V := \tilde{V}$. Dann gilt die Behauptung.

(c)

$$\begin{array}{ccccccc} A & & & & U & \subseteq & X \\ \cup\!\!\shortmid & & & & \cup\!\!\shortmid & & \cup\!\!\shortmid \\ B & \subseteq V' & \subseteq B' & \subseteq & V & \subseteq & Y \end{array}$$

Nach VL ist die untere Zeile äquivalent zu

$B \subseteq V'$, $\underbrace{Y \setminus V}_{\text{abg}} \subseteq Y \setminus B'$

Da $B = A \cap Y$ und $Y \setminus V = X \setminus U \cap Y$

$\overset{(b)}{\Rightarrow} \exists\, \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{T}_X$ mit $A \subseteq \tilde{V}$, $X \setminus U \subseteq \tilde{U}$, $\tilde{V} \cap \tilde{U} = \emptyset$ und $\tilde{V} \cap Y = V'$

$\Rightarrow$ Setze $U' := \tilde{V}$ und $A' := X \setminus \tilde{U}$

$\Rightarrow$ $A \subseteq U' \subseteq A' \subseteq U \subseteq X$