Lemma 6. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X, genau dann wenn*

(1) $\bigcup_{C \in \mathcal{B}} C = X$,
(2) *Ist $C, C' \in \mathcal{B}$, $x \in C \cap C'$, so gibt es ein $C'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in C'' \subseteq C \cap C'$.*

Beweis. Wir hatten schon gezeigt, dass jede Basis Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. Es erfülle $\mathcal{B}$ also (1) und (2). Wir behaupten, dass

$$\mathcal{T} = \{A \mid A \text{ ist Vereinigung von Mengen in } \mathcal{B}\ \}$$

eine Topologie auf X ist. Wegen (1) ist $X \in \mathcal{T}$. Da $\emptyset$ die leere Vereinigung ist, gilt auch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und damit (T1).

Sind $C_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, so gibt es für jedes $i \in I$ nach Voraussetzung $B_j^i \in \mathcal{B}$, $j \in I_i$ mit $C_i = \bigcup_{j \in I_j} B_j^i$ Insbesondere gilt

$$\bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in I_j} B_j^i \in \mathcal{T}.$$

Damit folgt (T2).

Wir zeigen nun noch, dass endliche Durchschnitte von Elementen in $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen. Hierfür zeigen wir die Aussage zunächst für Elemente $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{B}$ mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Aussage klar. Nach Induktionsannahme ist $C_1 \cap \dots \cap C_{k-1} \in \mathcal{T}$, das heißt, es gibt $A_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, mit $C_1 \cap \dots \cap C_{k-1} = \bigcup_{i \in I} A_i$. Insbesondere gilt

$$C_1 \cap \dots \cap C_k = (C_1 \cap \dots \cap C_{k-1}) \cap C_k = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap C_k = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap C_k).$$

Wir betrachten nun eine einzelne Menge $A_i \cap C_k$. Da $A_i, C_k \in \mathcal{B}$ gibt es für jedes $x \in A_i \cap C_k$ eine Menge $C_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in C_x \subseteq A_i \cap C_k$. Es folgt

$$A_i \cap C_k = \bigcup_{x \in A_i \cap C_k} C_x \in \mathcal{T}.$$

Wir wissen schon, dass $\mathcal{T}$ unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. Es gilt daher $C_1 \cap \dots \cap C_k \in \mathcal{T}$.

Für beliebige $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{T}$ können wir jetzt $C_1 \cap \dots \cap C_k \in \mathcal{T}$ zeigen. Nach Definition gibt es $B_j^i \in \mathcal{B}$, $j \in I_i$ mit $C_i = \bigcup_{j \in I_i} B_j^i$. Es folgt

$$C_1 \cap \dots \cap C_k = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcup_{j \in I_i} B_j^i = \bigcup_{j_1 \in I_1, \dots, j_k \in I_k} B_{j_1}^1 \cap \dots \cap B_{j_k}^k \in \mathcal{T}.$$

Damit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, für die $\mathcal{B}$ nach Definition eine Basis ist. $\square$