Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 1

Dr. Tommy Hofmann — Sommersemester 2018
Präsenzübung — Robin Ammon

Aufgabe 1. Für $a, b \in \mathbf{Z}$ definieren wir $S(a, b) = \{an + b \mid n \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{Z}$. Ferner sei $\mathcal{B} = \{S(a, b) \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0\}$. Zeige:

(i) Die Menge $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbf{Z}$ (Hinweis: $S(a, b) = S(a, c)$ für jedes $c \in S(a, b)$).

(ii) Jede nicht-leere offene Menge von $\mathbf{Z}$ enthält unendlich viele Elemente.

(iii) Die Mengen $S(a, b)$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, sind abgeschlossen.

(iv) Es gilt

$$\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}_{>0} \text{ prim}} S_{p,0}.$$

Schlussfolgere, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2. Es sei $X = \mathbf{R}^2$ und ρ die euklidische Metrik auf X. Wir definieren

$$d \colon X \times X \longrightarrow \mathbf{R},\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ \rho(x, 0) + \rho(y, 0), & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Zeige:

(i) Die Funktion d ist eine Metrik auf X.

(ii) Für $x \in X$ gilt: $\{x\}$ ist genau dann eine offene Menge bezüglich der durch d induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$, wenn $x \neq 0$.

Aufgabe 3. Es sei X eine beliebige nicht-leere Menge. Für $x, y \in X$ definiere

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik ist und bestimme die von d induzierte Topologie (d heißt die *diskrete Metrik*).

Aufgabe 4. Es sei X eine Menge. Eine *Ultrametrik* auf X ist eine Metrik $d \colon X \times X \to \mathbf{R}$, welche für alle $x, y, z \in X$ die Ungleichung

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$$

erfüllt. Es sei nun d eine Ultrametrik auf X und $x \in X$, $\epsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Wir betrachten den topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_d)$. Zeige:

(i) Die offene Kugel $B_\epsilon(x)$ ist abgeschlossen.

(ii) Ist $y \in B_\epsilon(x)$, so gilt $B_\epsilon(x) = B_\epsilon(y)$.