Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 2

Dr. Tommy Hofmann | Sommersemester 2018
Abgabetermin: 27.4.2018, 12:00 Uhr | Robin Ammon

Aufgabe 1. Es sei X eine Menge und für alle $x \in X$ sei $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ gegeben mit den Eigenschaften

(i) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$,

(ii) $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$,

(iii) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}(x)$,

(iv) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$.

Zeige, dass

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A : A \in \mathcal{U}(x)\}$$

eine Topologie auf X ist und dass für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von x ist (bezüglich $\mathcal{T}$).

Aufgabe 2. Es seien X, Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie von Y. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Funktion f ist stetig.

(ii) Für alle $M \subseteq X$ gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

(iii) Für alle $A \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(A)$ offen in X.

Folgere, dass eine Abbildung $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genau dann stetig ist, wenn sie nach dem ε-δ-Kriterium stetig ist: Für alle $x \in \mathbf{R}^n$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbf{R}$ mit der Komplement-endlich Topologie versehen. Welche der folgenden Abbildungen sind stetig?

(i) $f_1\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4$,

(ii) $f_2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^x$,

(iii) $f_3\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(x)$.

Aufgabe 4. Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \geq 0$. Wir betrachten die Kugel $K = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ um a mit Radius r. Zeige:

(i) Angenommen X ist sogar ein nicht-trivialer normierter Raum, d.h., X ist ein reeller Vektorraum ungleich $\{0\}$ und es existiert eine Norm $\|\ \| : X \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$. Dann gilt für den Rand von K:

$$\partial K = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

(ii) In einem beliebigen metrischen Raum ist dies in der Regel jedoch falsch.