Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 3

Dr. Tommy Hofmann — Sommersemester 2018

Abgabetermin: 11.5.2018, 12:00 Uhr — Robin Ammon

Im Folgenden betrachten wir $\mathbf{R}^n$ immer mit der natürlichen Topologie.

Aufgabe 1. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn es für alle stetigen Abbildungen $f\colon X \to \mathbf{R}$ und $b, c \in X$, $y \in \mathbf{R}$ mit

$$f(b) \leq y \leq f(c)$$

ein $a \in X$ mit $f(a) = y$ gibt. (Das heißt X ist genau dann zusammenhängend, wenn der Zwischenwertsatz für Abbildungen von X nach $\mathbf{R}$ gilt.)

Aufgabe 2. Es sei X ein topologischer Raum:

(i) Es seien A, B Teilmengen von X und A zusammenhängend. Zeige: Gilt $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend.

(ii) Zeige: Der Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Mengen, die sowohl offen als auc abgeschlossen sind, die Mengen $\emptyset$ und X sind.

Aufgabe 3. Es sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion mit Graph

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^2.$$

Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn der Graph Γ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Ein Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U gibt, die wegzusammenhängend ist. Zeige:

(i) Wenn X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, dann ist X wegzusammenhängend.

(ii) Folgere: Für eine offene Menge im $\mathbf{R}^n$ ist wegzusammenhängend gleichbedeutend mit zusammenhängend.