Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 4

Dr. Tommy Hofmann | Sommersemester 2018
Abgabetermin: 25.5.2018, 12:00 Uhr | Robin Ammon

Aufgabe 1. Es sei X eine überabzählbare Menge versehen mit der Komplement-abzählbar Topologie. Zeige:

(i) Der Raum X ist nicht T_2.

(ii) Jede konvergent Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Aufgabe 2. Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeige:

(i) X ist $T_1 \Rightarrow Y$ ist T_1.

(ii) X ist $T_2 \Rightarrow Y$ ist T_2.

(iii) X ist $T_3 \Rightarrow Y$ ist T_3.

(iv) X ist T_4 und Y ist abgeschlossen $\Rightarrow Y$ ist T_4.

Aufgabe 3. Es sei X ein diskreter topologischer Raum. Zeige, dass X genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 4. Es sei X ein hausdorffscher Raum.

(i) Zeige, dass man eine kompakten Menge $A \subseteq X$ und einen Punkt $x_0 \in X \setminus A$ trennen kann, das heißt, es existieren offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $x_0 \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

(ii) Zeige, dass man disjunkte kompakte Mengen $A, B \subseteq X$ trennen kann, das heißt, es existieren offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Kreislinie $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung von $\mathbf{R}$ ist. (Hinweis: Stereographische Projektion.)