Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 5

Dr. Tommy Hofmann Sommersemester 2018
Abgabetermin: 8.6.2018, 12:00 Uhr Robin Ammon

Aufgabe 1. Es seien X und Y topologische Räume und $p_X : X \times Y \to X$ die Projektion auf die erste Komponente.

(i) Zeige, dass p_X offen ist.

(ii) Gib ein Beispiel an, in dem p_X nicht abgeschlossen ist.

(iii) Zeige, dass p_X abgeschlossen ist, falls Y quasikompakt ist.

(iv) Zeige (ohne den entsprechenden Satz aus der Vorlesung zu benutzen): Wenn X und Y quasikompakt sind, dann hat auch $X \times Y$ diese Eigenschaft.

Aufgabe 2. Es seien X_i, $i \in I$, topologische Räume, I beliebig. Zeige, dass $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend ist genau dann, wenn X_i zusammenhängend ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 3.

(i) Es seien X_i, $i \in I$, topologische Räume, I beliebig. Zeige: Die Eigenschaft T_1, T_2 bzw. T_3 gilt für $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann, wenn sie für alle X_i, $i \in I$, gilt.

(ii) Auf $X := [0,1] \subseteq \mathbf{R}$ mit der natürlichen Topologie sei die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x = y \text{ oder } \{x, y\} \subseteq \mathbf{Q}$$

gegeben. Zeige, dass der Quotientenraum $X/{\sim}$ keines der Trennungsaxiome erfüllt.

Aufgabe 4. Es sei

$$S^{n-1} = \partial D^n \subseteq D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Zeige: D^n/S^{n-1} ist homöomorph zu S^n für alle $n \geq 1$.