Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 6

Dr. Tommy Hofmann — Sommersemester 2018
Abgabetermin: 22.6.2018, 12:00 Uhr — Robin Ammon

Aufgabe 1. Es seien X, Y topologische Räume. Zeige:

(i) Ist X kontrahierbar, so ist X wegzusammenhängend.

(ii) Ist Y kontrahierbar, so ist jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ nullhomotop.

Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum G zusammen mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.
- Die Abbildungen $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ und $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sind stetige Abbildungen.

Beispiele hierfür sind $(\mathbf{R}^n, +)$, $(\mathbf{Z}, +)$ oder $(S^1, \cdot)$.

Aufgabe 2. Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element $x_0 \in G$. Sind α, β Schleifen an x_0, so definieren wir

$$\alpha \cdot \beta\colon [0, 1] \longrightarrow G,\ t \longmapsto \alpha(t) \cdot \beta(t).$$

Insbesondere ist $\alpha \cdot \beta$ wieder eine Schleife an x_0. Zeige:

(i) Für zwei Schleifen α, β an x_0 gilt $[\alpha] * [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$.

(ii) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, x_0)$ ist abelsch.

Aufgabe 3. Es seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte topologische Räume. Zeige:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Aufgabe 4. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige:

(i) Sind α, β komponierbare Wege in X und $\gamma = \alpha * \beta$, so gilt $\gamma_\sharp = \beta_\sharp \circ \alpha_\sharp$.

(ii) Angenommen $A \subseteq X$ ist ein Teilraum und $r\colon X \to A$ eine stetige Abbildung mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Ist $a_0 \in A$, so ist die induzierte Abbildung

$$r_*\colon \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$$

surjektiv.

(iii) Ist α ein Weg in X und $t_0 \in [0, 1]$, so ist α homotop zum konstanten Weg $\epsilon_{\alpha(t_0)}$