Übungen zur Einführung in die Topologie — Blatt 7

Dr. Tommy Hofmann — Sommersemester 2018
Abgabetermin: 6.7.2018, 12:00 Uhr — Robin Ammon

Aufgabe 1.

(i) Eine endliche Gruppe operiere frei auf einem Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Gruppenoperation dann auch frei diskontinuierlich ist.

(ii) Gibt ein Bespiel für eine Gruppenoperation auf einem topologischen Raum, die zwar frei, aber nicht frei diskontinuierlich ist.

Aufgabe 2. Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raumes X, so dass $X = U \cup V$ gilt und $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Ferner sei $x_0 \in U \cap V$. Zeige:

(i) Zu jeder Schleife α an x_0 gibt es Schleifen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ an x_0, die alle komplett in U oder komplett in V liegen, so dass $[\alpha] = [\alpha_1] * \cdots * [\alpha_n] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt.

(ii) Ist $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$, so ist auch $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

(iii) Es ist $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ für alle $n \geq 2$ und $x_0 \in S^n$.

Aufgabe 3. Es sei $n \geq 2$ und $\mathbf{P}^n$ der n-dimensionale reelle projektive Raum. Zeige:

(i) Die Abbildung $\pi\colon S^n \to \mathbf{P}^n,\ x \mapsto [x]$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.

(ii) Es ist $\pi_1(\mathbf{P}^n, x_0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ für alle $x_0 \in \mathbf{P}^n$.

Aufgabe 4. Es sei $X = S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ und $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Betrachte die Operation $G \times X \to X,\ ([k], x) \mapsto e^{2\pi i \frac{k}{n}} x$ von G auf X.

(i) Zeige, dass die Gruppe G frei diskontinuierlich auf X operiert .

(ii) Zeige, dass $X/G \cong X$.

(iii) Es sei $x_0 \in X$ und $p\colon (X, x_0) \to (X/G, [x_0])$ die Quotientenabbildung. Bestimme $p_*(\pi_1(X,x_0))$. Was bedeutet das anschaulich?