Einführung in die Topologie, Tommy Hofmann, 09.05.2018

Beispiel 17 (Zariski-Topologie)**.** Es sei K ein beliebiger Körpern, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ und $X = K^n$. Wir wollen eine Topologie auf X definieren. Hierfür betrachten wir die Menge $K[X_1, \ldots, X_n]$ aller multivariaten Polynome in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten in K (etwa $2X_1 + X_1X_2 \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$). Für eine Menge $A \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ definieren wir

$$Z(A) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in K^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) = 0 \text{ für alle } f \in A\} \subseteq X^n$$

als die gemeinsame Nullstellenmenge aller Polynome in A. Mengen dieser Form wollen wir als *algebraische Menge* bezeichnen. (Bespielsweise ist für $n = 2, K = \mathbf{R}$ die Menge $Z(\{X_1^2 - X_2\}) \subseteq \mathbf{R}^2$ eine Parabel und $Z(\{X_1^2 + X_2^2 - 1\}) \subseteq \mathbf{R}^2$ der Einheitskreis.) Die algebraischen Mengen sollen die abgeschlossenen Mengen unserer Topologie werden, das heißt, wir definieren

$$\mathcal{T} = \{X \setminus Z(A) \mid Z(A) \text{ eine algebraische Menge}\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, überprüfen wir die drei Axiome:

(i) Ist $f = 1 \in K[X_1, \ldots, X_n]$ das konstante Polynom, so gilt $Z(\{f\}) = \emptyset$. Da zudem $Z(\emptyset) = X$, folgt $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(ii) Wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten. Dies ist äquivalent dazu, dass für zwei algebraische Mengen $Y_1 = Z(A_1)$ und $Y_2 = Z(A_2)$ auch $Y_1 \cup Y_2$ algebraisch ist. Setzen wir $A_1 \cdot A_2 = \{fg \mid f \in A_1,\ g \in A_2\}$, so folgt die Behauptung aus $Y_1 \cup Y_2 = Z(A_1 \cdot A_2)$. Ist $z \in Y_1 \cup Y_2$, so nehmen wir ohne Einschränkung $z \in Y_1 = Z(A_1)$ an. Da $f(z) = 0$ für alle $f \in A_1$ gilt, folgt $(fg)(z) = 0$ für alle $f \in A_1, g \in A_2$, das heißt, $z \in Z(A_1 \cdot A_2)$. Sei nun andererseits $z \in Z(A_1 \cdot A_2)$ und $z \notin Y_1$. Dann gibt es ein $f \in A_1$ mit $f(z) \neq 0$. Da aber $f(z)g(z) = 0$ für alle $g \in A_2$, folgt $g(z) = 0$ für alle $g \in A_2$ (Körper haben keine Nullteiler), das heißt, $z \in Y_2$.

(iii) Schließlich zeigen wir, dass $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter beliebigen Vereinigungen. Seien hierfür $Y_i = Z(A_i)$, $i \in I$ algebraische Mengen. Dann ist aber auch $\bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} Z(A_i) = Z(\bigcup_{i \in I} A_i)$ algebraisch, was zu zeigen war.

Die so erhaltene Topologie heißt die *Zariski-Topologie* und ist ein zentrales Hilfsmittel in der algebraischen Geometrie, welche sich mit der Untersuchung von Nullstellenmengen von Polynomen beschäftigt. Mit Hilfe der Zariski-Topologie lässt sich eine Brücke zwischen Algebra und Topologie schlagen. Ein Beispiel hierfür ist die folgende Aussage: Ist K algebraisch abgeschlossen (etwa $K = \mathbf{C}$), so ist für ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ die algebraische Menge $Z(\{f\})$ genau dann irreduzibel, falls $f = g^m$ für ein irreduzibles Polynom $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

(Ist $n = 1$, das heißt, $X = K$, sowie K unendlich, so ist die Zarsiki-Topologie identisch zur Komplement-endlich Topologie).

4. Trennungsaxiome

Definition 18. Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen X

- einen T_0-*Raum*, falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ eine offene Menge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U, y \notin U$ oder $y \in U, x \notin U$.
- einen T_1-*Raum*, falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U, y \notin U$ und $y \in V, x \notin V$.
- einen T_2-*Raum*, falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

- einen T_3-*Raum*, falls für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U, A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- einen T_4-*Raum*, falls für alle $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $A \subseteq U, B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Wir nennen X einen *Hausdorff-Raum* oder *hausdorffsch*, falls X ein T_2-Raum ist. Wir nennen X *regulär*, falls X ein T_3- und T_0-Raum ist. Wir nennen X *normal*, falls X ein T_4- und T_1-Raum ist.

Lemma 19. Es sei X ein topologischer Raum. Dann ist X ein T_1-Raum, genau dann wenn $\{x\}$ abgeschlossen ist für alle $x \in X$.

Beweis. Es sei X ein T_1-Raum und $x \in X$. Ist $y \neq x$, so gibt es eine offene Menge V_y mit $y \in V_y$ und $x \notin V_y$. Es folgt, dass $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X, y \neq x} V_y$ offen bzw. $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Angenommen alle einelementigen Mengen sind abgeschlossen. Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ sind daher $U = X \setminus y, V = X \setminus \{x\}$ offene Mengen mit $x \in U, y \notin U$ und $y \in V, x \notin V$. □

Korollar 20. Es sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

$$X \text{ normal} \Rightarrow X \text{ ist regulär} \Rightarrow X \text{ ist } T_2 \Rightarrow X \text{ ist } T_1 \Rightarrow X \text{ ist } T_0.$$

Beweis. Die letzten drei Implikationen sind klar.

Es sei X normal. Nach Definition ist X ein T_4- und T_1-Raum. Nach Lemma 19 ist $\{x\}$ abgeschlossen für alle $x \in X$. Damit ist X als ein T_4-Raum auch ein T_3-Raum. Da jeder T_1-Raum auch ein T_0-Raum ist, folgt, dass X regulär ist.

Es sei nun X regulär und $x, y \in X$, $x \neq y$. Es gibt daher $W \subseteq X$ offen mit $x \in W$ und $y \notin W$ (ohne Einschränkung). Insbesondere ist $A = X \setminus W$ abgeschlossen mit $x \notin A$ und $y \in A$. Da X ein T_3-Raum ist gibt es offene Mengen U, V mit $x \in U$, $y \in A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Folglich ist X ein T_2-Raum. □

Beispiel 21.

(i) Es sei $X = \{P, Q\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{P\}\}$. Dann ist X ein T_0-Raum. Da $\{P\}$ nicht abgeschlossen ist, ist X kein T_1-Raum (Lemma 19).

(ii) Betrachte $X = \mathbf{Z}$ mit der Komplement-endlich Topologie. Für $x \in X$ ist $X \setminus \{x\}$ offen, das heißt, $\{x\}$ abgeschlossen. Insbesondere ist X ein T_1-Raum nach Lemma 19. Wir zeigen nun, dass zwei nicht-leere Mengen U, V niemals disjunkt sind. Nach Definition sind $X \setminus U$, $X \setminus V$ endlich. Folglich gilt dies auch für $X \setminus (U \cap V) = X \setminus U \cup X \setminus V$. Da X unendlich ist muss $U \cap V \neq \emptyset$ gelten. Damit kann X nicht hausdorffsch sein.

Definition 22. Es sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_n$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Grenzwert* von $(x_n)_n$, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $n_0 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. In diesem Fall schreiben wir $(x_n) \to x$.

Lemma 23. Ist X ein Hausdorff-Raum, so sind Grenzwerte eindeutig.

Beweis. Es sei $(x_n)_n$ eine Folge in X, die gegen $a, b \in X$ konvergiert. Angenommen $a \neq b$. Da X hausdorffsch ist, gibt es offene Mengen U, V mit $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Insbesondere ist $U \in \mathcal{U}(a)$ und $V \in \mathcal{U}(b)$. Nach Definition des Grenzwertes gibt es daher ein $n_0 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ mit $x_n \in U$ und $x_n \in V$ für alle $n \geq n_0$. Folglich ist $x_{n_0} \in U \cap V$, ein Widerspruch. □

Definition 24. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls eine Metrik d auf X existiert, für die

$$\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

Satz 25. Ist X metrisierbar, so ist X normal.

Beweis. Es sei d ein Metrik, für die $\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ eine Basis der Topologie von X bildet. Insbesondere sind alle Bälle $B_\varepsilon(x)$ offen.

Wir zeigen zunächst, dass X hausdorffsch (und damit ein T_1-Raum) ist: Es seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Setzen wir $\varepsilon = d(x,y)/2 > 0$, so folgt $x \in U := B_\varepsilon(x)$ und $y \in V := B_\varepsilon(y)$. Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich unmittelbar $U \cap V = \emptyset$. Damit folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, dass X ein T_4-Raum ist: Seien hierfür A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in X. Also ist $A \subseteq X \setminus B$ und $X \setminus B$ offen. Nach Voraussetzung gibt es für alle $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus B$. Setzen wir $U = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x/2}(x)$, so folgt, dass U offen ist mit $A \subseteq U$. Analog konstruieren wir $V = \bigcup_{y \in B} B_{\varepsilon_y/2}(y)$ offen mit $B \subseteq V$ und $B_{\varepsilon_y}(y) \subseteq X \setminus A$. Wir müssen noch zeigen, dass $U \cap V = \emptyset$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es ein $z \in U \cap V$. Nach Definition von U und V gibt es $x \in A$ und $y \in B$ mit $z \in B_{\varepsilon_x/2}(x)$ und $z \in B_{\varepsilon_y/2}(y)$. Es folgt

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} \leq \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}.$$

Gilt $\max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} = \varepsilon_x$, so folgt $y \in B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq X \setminus B$, ein Widerspruch zu $y \in A \subseteq X \setminus B$. Analog führt $\max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} = \varepsilon_y$ zu $x \in X \setminus A$, ebenso ein Widerspruch. Damit ist X ein T_4-Raum und damit normal. □

Beispiel 26. Im Beweis des vorherigen Satzes haben wir gezeigt, dass jeder metrisierbare Raum hausdorffsch ist. Insbesondere folgt daraus, dass $\mathbf{Z}$ mit der Komplement-endlich Topologie nicht metrisierbar ist.

Satz 27. Es sei X ein topologischer Raum. Ist X normal mit abzählbarer Basis, so ist X metrisierbar.

Beweis. Nicht in dieser Vorlesung. □