**Satz 19** (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Es seien $n \in \mathbf{Z}_{>0}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$ und $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ eine nicht-konstante Polynomfunktion. Dann gibt es ein $z \in \mathbf{C}$ mit $p(z) = 0$.

*Beweis.* Wir können zunächst annehmen, dass $a_n = 1$ gilt. Ansonsten betrachten wir die Polynomfunktion $p/a_n$.

(i) *Für $f\colon S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^n$ ist $f_*$ injektiv*: Es sei $p_0\colon [0,1] \to S^1,\ t \mapsto e^{2\pi i t}$. Nach einem vorherigen Beispiel wissen wir, dass die Pfadhomotopieklasse $[p_0]$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, s_0)$ erzeugt (die Abbildung $\mathbf{Z} \to \pi_1(S^1, s_0), k \mapsto [p_0]^k = [p_0] * \cdots * [p_0]$ ist ein Isomorphismus). Weiter gilt $f \circ p_0\colon [0,1] \to S^1,\ t \mapsto e^{2\pi i t n}$ und somit $f_*([p_0]) = [f \circ p_0] = [p_0] * \cdots * [p_0] = [p_0]^n$. Da $[p_0]$ ein Erzeuger ist und $n > 0$ folgt die Injektivität von $f_*$.

(ii) *Die Abbildung $g\colon S^1 \to \mathbf{C}^\times,\ z \mapsto z^n$ ist nicht nullhomotop*: Es sei $j\colon S^1 \to \mathbf{C}^\times$ die Inklusion. Dann ist $g = j \circ f$ und damit $g_* = j_* \circ f_*$. Die Injektivität von $j_*$ ist wie in Aufgabe 4 auf Blatt 6 zu sehen. Zusammen mit Teil (i) folgt, dass auch $g_*\colon \pi_1(S^1, s_0) \to \pi_1(S^1, s_0)$ injektiv ist. Mithin ist $g_*$ nicht trivial (da $\pi_1(S^1, s_0) \neq \{e\}$) und damit $g$ nicht nullhomotop nach Lemma 18.

(iii) *Gilt $|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < 1$, so hat $p$ eine Nullstelle auf $D^2$*: Angenommen die Aussage ist falsch, das heißt, $p(z) \neq 0$ für alle $z \in D^2$. Dann induziert $p$ durch Einschränkung des Zielbereichs die stetige Abbildung $\tilde{p}\colon D^2 \to \mathbf{C}^\times,\ z \mapsto p(z)$. Setzen wir $h = \tilde{p}|_{S^1}\colon S^1 \to \mathbf{C}^\times$, so ist $\tilde{p}$ eine stetige Fortsetzung von $h$ auf $D^2$ und damit $h$ nullhomotop nach Proposition 5.10. Wir betrachten nun die Abbildung

$$F\colon S^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}^\times,\ (z,t) \mapsto z^n + t(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0).$$

Die Wohldefiniertheit von $F$ folgt aus der folgenden Rechnung für $(z,t) \in S^1 \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} |F(z,t)| \geq |z^n| - |t(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0)| &\geq 1 - t(|a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

Da $F$ auch stetig ist, liefert $F$ eine Homotopie von $z \mapsto F(z,0) = g(z)$ nach $z \mapsto F(z,1) = h(z)$, das heißt, $g \simeq h$. Dies ist ein Widerspruch, da $h$ nullhomotop und $g$ nicht nullhomotop ist.

(iv) *Die Aussage gilt*: Für $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ betrachten wir die Funktion $q\colon C \to \mathbf{C}$ mit $q(z) = p(cz)$. Dann gilt

$p$ hat eine Nullstelle $\Leftrightarrow q$ hat eine Nullstelle $\Leftrightarrow q/c^n$ hat eine Nullstelle.

Nun ist aber

$$q(z)/c^n = z^n + \frac{a_{n-1}}{c} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}} z + a_0.$$

Für ein geeignetes $c$ erfüllt $q/c^n$ also die Voraussetzung aus Schritt (iii) und die Aussage ist gezeigt.

□

**Bemerkung 20.** Hat man die Existenz von Nullstellen von Polynomen bewiesen, ergibt sich sofort auch die Frage nach der Berechnung dieser.

(i) Für $n \in \{1,2,3,4\}$ gibt es geschlossene Formeln für die Nullstellen, die nur abhängig von den Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ sind. Im Fall $n = 2$ ist das gerade die bekannte *pq*-Formel (bekannt auch unter anderen Namen). Für $n \in \{3,4\}$ sind die Formeln komplizierter und gehen auf Cardano und Ferrari zurück. Ab

$n \geq 5$ ist die Aussage hingegen falsch, siehe hierzu den Satz von Abel–Ruffini und die Einführung in die Algebra.

(ii) Man kann Homotopie auch benutzen um Nullstellen von Polynomen numerisch zu approximieren. Um die Grundidee zu illustrieren, nehmen wir an, dass $f\colon [0,1] \to \mathbf{C}$ ein Polynom ist, für welches genau ein $x_1 \in [0,1]$ mit $f(x_1) = 0$ existiert. Wir wollen dieses $x_1$ finden (numerisch approximieren). Hierfür wählen wir als erstes ein Polynom $g\colon [0,1] \to \mathbf{C}$, dessen Nullstelle $x_0 \in [0,1]$ wir kennen und eine Homotopie $F\colon f \simeq g$, etwa $F(z,t) = tf(z) + (1-t)g(z)$.

Für $t \in [0,1]$ sei jetzt $f_t\colon [0,1] \to \mathbf{C}$, $f_t(z) = F(z,t)$. Angenommen jedes $f_t$ hat eine eindeutige Nullstelle $x_t \in [0,1]$. Nach Voraussetzung ist $x_0$ die bekannte Nullstelle von $g = f_0$ und $x_1$ die gesuchte Nullstelle von $f = f_1$. Die Funktion $[0,1] \to [0,1]$, $t \mapsto x_t$ beschreibt also das Verhalten der Nullstelle der Funktionenschar $(f_t)_{t\in[0,1]}$. Als Nächstes wählen wir eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von $[0,1]$. Da $x_{t_i}$ Nullstelle von $f_{t_i}$ ist, folgt aus der Stetigkeit von $F$, dass $x_{t_i}$ in der Nähe der Nullstelle $x_{t_{i+1}}$ von $f_{t_{i+1}}$ liegt. Folglich kann man $x_{t_{i+1}}$ ausgehend von $x_{t_i}$ numerisch approximieren. Indem wir iterativ vorgehen, können wir auch $x_{t_k} = x_1$ approximieren.

Als nächstes wollen wir uns stetige Funktionen $f\colon S^1 \to S^1$ und Punkte $x \in S^1$ mit der Eigenschaft $f(x) = -f(-x)$ anschauen.

**Satz 21.** Es sei $p\colon (Y,y_0) \to (X,x_0)$ eine Überlagerung und $h\colon \pi_1(X,x_0) \to p^{-1}(x_0)$ der Fasertransport. Dann gilt

(i) Ist $Y$ wegzusammenhängend, so ist $h$ surjektiv.

(ii) Ist $\pi_1(Y,y_0) = \{e\}$ trivial, so ist $h$ injektiv.

Insbesondere ist $h$ eine Bijektion, falls $Y$ einfach zusammenhängend ist.

*Beweis.*

(i) Es sei $y_1 \in p^{-1}(x_0)$. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg $\beta$ von $y_0$ nach $y_1$. Dann ist $\alpha = p \circ \beta$ eine Schleife an $x_0$ und $\beta$ der Lift von $\alpha$ mit Anfangspunkt $y_0$. Nach Definition gilt $h([\alpha]) = \beta(1) = y_1$ und $h$ ist folglich surjektiv.

(ii) Es sei $h([\alpha_1]) = h([\alpha_2])$ und $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ die Lifts von $\alpha_1, \alpha_2$ mit Anfangspunkt $y_0$. Nach Definition ist $\tilde{\alpha}_1(1) = h([\alpha_1]) = h([\alpha_2]) = \tilde{\alpha}_2(1)$ und demnach $\tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2^{-1}$ eine Schleife an $y_0$. Nach Voraussetzung ist also

$$[\tilde{\alpha}_1] * [\tilde{\alpha}_2]^{-1} = [\tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2^{-1}] = e$$

und somit $[\tilde{\alpha}_1] = [\tilde{\alpha}_2]$. Es gibt folglich eine Pfadhomotopie $F : \tilde{\alpha}_1 \simeq_p \tilde{\alpha}_2$, welche nach Lemma 6.14 (iii) eine Pfadhomotopie $q \circ F : q \circ \tilde{\alpha}_1 \simeq_p q \circ \tilde{\alpha}_2$ induziert. Da $\alpha_1 = q \circ \tilde{\alpha}_1$ und $\alpha_2 = q \circ \tilde{\alpha}_2$, folgt $[\alpha_1] = [\alpha_2]$.

□

**Satz 22.** Ist $f\colon S^1 \to S^1$ stetig mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in S^1$, so ist $f$ nicht nullhomotop.

*Beweis.* Da $f(1) \in S^1$ existiert $\theta \in [0,2\pi)$ mit $f(1) = e^{i\theta}$. Es sei $\rho\colon S^1 \to S^1, z \mapsto e^{-i\theta}z$ die zugehörige Drehung zum Winkel $-\theta$. Dann gilt $\rho(-x) = -\rho(x)$ und somit $(\rho\circ f)(x) = \rho(f(x)) = \rho(-f(-x)) = -(\rho\circ f)(-x)$ für alle $x \in S^1$. Zudem gilt $(\rho\circ f)(1) = \rho(f(1)) = 1$. Wäre $\rho \circ f$ nullhomotop, so auch $f = \rho^{-1} \circ \rho \circ f$. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass bereits $f(1) = 1$ gilt.

Es sei $q\colon S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^2$.

(i) *Es gibt eine stetige Funktion $k\colon S^1 \to S^1$ mit $k \circ q = q \circ f$*: Es sei $g = q \circ f$. Für $x \in S^1$ gilt $g(-x) = q(f(-x)) = q(-f(x)) = q(f(x)) = g(x)$. Insbesondere folgt damit aus $q(x) = q(x')$ bereits $g(x) = g(x')$. Nach §4 existiert die gewünschte Abbildung $k$.

(ii) *Die Abbildung $q$ ist eine Überlagerung.*

(iii) *Die induziert Abbildung $k_*$ ist nicht trivial*: Es sei $h$ der Fasertransport zu $q$ an 1 und $\beta$ ein Weg von 1 nach $-1$ in $S^1$. Dann ist $\alpha = q \circ \beta$ ein Weg in $S^1$ von 1 nach $q(-1) = 1$, das heißt, eine Schleife an 1. Da $\beta$ ein Lift von $\alpha$ mit Anfangspunkt 1 ist, gilt $h([\alpha]) = \beta(1) = -1 \neq 1$. Insbesondere ist $[\alpha] \neq e$. (Im Fall $[\alpha] = e$ wäre $\alpha$ pfadhomotop zum konstanten Weg und der konstante Weg ein Lift von $\alpha$, welches $h([\alpha]) = 1$ nach sich ziehen würde).

Damit gilt nun
$$k_*([\alpha]) = [k \circ \alpha] = [k \circ q \circ \beta] = [q \circ f \circ \beta].$$
Es ist $f \circ \beta$ ein Pfad von $1 = f(\beta(0))$ nach $-1 = f(\beta(1))$. Mit dem eben gezeigten folgt auch $k_*([\alpha]) \neq e$.

(iv) *Die Abbildung $f$ ist nicht nullhomotop*: Nach (iii) ist $k_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ nicht trivial. Da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ muss damit $k_*$ schon injektiv sein. Wie im Beweis von Satz 19 ist auch $q_*$ injektiv. Es folgt, dass auch $k_* \circ q_* = q_* \circ f_*$ injektiv ist, und somit auch $f_*$. Insbesondere ist $f_*$ nicht trivial und $f$ nach Lemma 18 somit nicht nullhomotop.

□

**Korollar 23.** Es gibt keine stetige Abbildung $g\colon S^2 \to S^1$ mit $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^2$.

*Beweis.* Wir betrachten $S^1$ als Äquator von $S^2$. Angenommen solch ein $g$ existiert. Dann ist $g|_{S^1}$ nach Satz 21 nicht nullhomotop. Es sei $E$ die obere Halbebene von $S^2$, welche homöomorph zu $D^2$ ist. Wenn wir den Homöomorphismen folgen, stellen wir fest, dass $g|_{S^1}$ eine Fortsetzung auf $D^2$ hat. Dies ist ein Widerspruch zu Proposition 5.10, da $g|_{S^1}$ nicht nullhomotop ist. □

**Satz 24** (Borsuk–Ulam für $S^2$)**.** Angenommen $f\colon S^2 \to \mathbf{R}^2$ ist steig. Dann gibt es $x \in S^2$ mit $f(-x) = f(x)$.

*Beweis.* Angenommen es gilt $f(-x) \neq f(x)$ für alle $x \in S^2$. Dann betrachten wir die Funktion
$$g\colon S^2 \longrightarrow S^1,\ x \longmapsto \frac{(f(x) - f(-x))}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$
Diese ist stetig und erfüllt $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^2$. Dies ist ein Widerspruch zu Korollar 22. □

**Bemerkung 25.** Satz 23 hat eine interessante meteorologische Anwendungen: (Zu jedem Zeitpunkt) gibt es auf der Erde zwei gegenüberliegende Punkte, an denen die gleiche Temperatur und der gleiche Luftdruck herrscht. Um dies aus Satz 23 abzuleiten, betrachte man die Erdoberfläche als Kugeloberfläche und die Funktion, die jedem Punkt die Temperatur und den Luftdruck an diesem Ort zuordnet. Dies liefert eine stetige Abbildung $f\colon S^2 \to \mathbf{R}^2$ und Satz 23 liefert das gesuchte Resultat.